

ВЕСЦІ

НАЦЫЯНАЛЬнай АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК 2010 № 4

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК 2010 № 4

ЗАСНАВАЛЬНІК — НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

Часопіс выдаецца са студзеня 1956 г.

Выходзіць чатыры разы ў год

ЗМЕСТ

МАТЭМАТЫКА

Харин Ю. С., Вечерко Е. В. О некоторых задачах статистической проверки гипотез в стеганографии.....	5
Жук Е. Е. Устойчивость байесовского решающего правила при неточно заданных априорных вероятностях классов.....	14
Овсянников А. В. Интервальное прогнозирование нестационарных процессов на основе ядерных оценок плотности вероятности.....	21
Худяков А. П. Интерполяционные многочлены типа Эрмита–Биркгофа относительно отдельных чебышевских систем функций.....	29
Воробьев Н. Н., Побойнев В. О. О булевых решетках частично насыщенных формаций.....	37
Каморников С. Ф. О решетке подгрупп fratiniева типа.....	43
Куксо О. С., Васильев Д. В., Коледа Д. В. Применение метрической теории трансцендентных чисел к задаче о значениях дискриминантов целочисленных многочленов.....	49
Пирютко Е. В. Многомерная лемма Гензеля и совместные приближения p -адических чисел алгебраическими.....	54
Касабуцкий А. Ф. О множествах Лебега показателя экспоненциальной устойчивости линейных дифференциальных систем с параметром.....	58

Хартовский В. Е. К вопросу управления линейными системами нейтрального типа	68
Ерофеенко В. Т. Моделирование двухсторонних граничных условий для акустических волн на упругом экране	76

ФІЗІКА

Плетюхов В. А., Стражев В. И., Андрусевич П. П. Внутренняя симметрия восьмикомпонентного дираковского поля	85
Овсюк Е. М., Кисель В. В., Редьков В. М. О дираковской частице в однородном магнитном поле в пространстве Римана	91
Кулак Г. В., Анисимова А. Е., Матвеева А. Г., Ропот П. И. Возбуждение гиперзвука системой встречно-штыревых электродов в кристаллах ниобата лития для широкополосной обработки сигналов.....	98
Каролик А. С. Электрические свойства субграниц в компактных субмикроструктурах.....	103
Кушнир В. Н., Прищепа С. Л. Магнитные неоднородности и резистивный переход в наноструктурах сверхпроводник / ферромагнетик / сверхпроводник.....	108

ІНФАРМАТЫКА

Войткова М. В., Войтович А. П., Мрочек А. Г. Дифференциальная диагностика мерцательной аритмии и трепетания предсердий на основе анализа независимых компонент	112
Геэвіч Ю. С. Пераўтварэнне лікаў у лічэбнікі ў сістэме сінтэза маўлення па тэксте на беларускай і рускай мовах	119

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ 2010 № 4

Серия физико-математических наук

на русском и белорусском языках

Вядучы рэдактар І. С. Александровіч

Камп'ютарная вёрстка В. Л. Смольская

Здадзена ў набор 26.10.2010. Падапісана да друку 15.12.2010. Выхад у свет 22.12.2010. Фармат 60 × 84¹/₈. Папера афсетная.

Ум. друк. арк. 14,88. Ул.-выд. арк. 16,4. Тыраж 114 экз. Заказ 490.

Кошт нумару: індывідуальная падпіска – 17780 руб.; ведамасная падпіска – 44110 руб.

Рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Выдавецкі дом «Беларуская навука». ЛІ № 02330/0494405 ад 27.03.2009.

Вул. Ф. Скарыны, 40, 220141, Мінск. Пасведчанне аб рэгістрацыі № 392 ад 18.05.2009.

Надрукавана ў РУП «Выдавецкі дом «Беларуская навука».

© Выдавецкі дом «Беларуская навука»

Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2010

PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

PHYSICS AND MATHEMATICS SERIES 2010 N 4

FOUNDER IS THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

The Journal has been published since January 1956

Issued four times a year

CONTENTS

MATHEMATICS

Kharin Yu. S., Vecherko E. V. Some problems of statistical hypotheses testing in steganography	5
Zhuk E. E. The Bayes decision rule stability under inaccurately determined <i>a priori</i> probabilities of classes	14
Ovsianikov A. V. Interval prediction of non-stationary stochastic processes on the basis of nuclear estimates of probability density	21
Hudyakov A. P. Hermite–Birkhoff type interpolation polynomials with respect to particular Chebyshev systems of functions	29
Vorob'ev N. N., Poboinev V. O. Boolean lattices of partially saturated formations	37
Kamornikov S. F. Lattice of Frattini-type subgroups	43
Kukso O. S., Vasilyev D. V., Kaljada D. V. Application of metric transcendental number theory to the problem of discriminant values for integral polynomials	49
Pirutka A. V. Multi-dimensional Hensel lemma and simultaneous approximation of <i>p</i> -adic numbers by <i>p</i> -adic algebraic numbers	54
Kasabutsky A. F. Lebesgue sets of the exponential stability index of linear differential systems with the parameter	58
Khartovskii V. E. Control of linear systems of neutral type	68
Erofeenko V. T. Modeling of two-side boundary conditions for acoustic waves on the elastic screen	76

PHYSICS

Pletyukhov V. A., Strazhev V. I., Andrushevich P. P. Internal symmetry of the 8-component Dirac field	85
Ovsiyuk E. M., Kisel V. V., Red'kov V. M. Dirac particle equation in the homogeneous magnetic field in the Riemann space	91
Kulak G. V., Anisimova A. E., Matveeva A. G., Ropot P. I. Excitation of hypersound by the system of interdigitated electrodes in lithium niobate crystals for wideband processing of signals	98
Karolik A. S. Electric properties of subboundaries in compact sub-microstructures	103
Kushnir V. N., Prischepa S. L. Magnetic inhomogeneities and the resistive transition in the superconductor/ferromagnet/ superconductor nanostructures	108

INFORMATICS

Voitkova M. V., Voitovich A. P., Mrochek A. G. Differential diagnostics of atrial arrhythmia and atrial flutter by means of the independent component analysis	112
Hetsevich Yu. S. Numbers to numerals converting in the text to the speech synthesis in the Belarusian and Russian languages.....	119

Национальная академия наук Беларуси

МАТЭМАТЫКА

УДК 519.2

Ю. С. ХАРИН, Е. В. ВЕЧЕРКО

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ
В СТЕГАНОГРАФИИ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 31.05.2010)

Введение. В настоящее время стеганография стремительно развивается и используется при решении задач защиты информации и авторских прав [1–5]. Вероятностно-статистические вопросы стеганографии являются недостаточно проработанными, в частности, актуальна проблема построения и анализа адекватных математических моделей контейнеров, используемых для скрытия («вкрапления» [4]) защищаемой информации.

Метод LSB, заключающийся в использовании наименее значимых бит цифровых представлений контейнеров для встраивания защищаемой информации [1, 3], является одним из наиболее распространенных в стеганографии методов, который применяется для различных форматов контейнеров. Существуют системы, основанные на LSB-методе, в которых вместо замены наименее значимых бит выполняются операции «инкрементации» или «декрементации» в зависимости от значений бит встраиваемого сообщения [6]. В [2] предложен метод, основанный на статистическом анализе пар значений, которые изменяются при встраивании информации.

В статье исследуются вероятностно-статистические свойства LSB-метода.

Вероятностные модели и свойства стегако контейнеров. Введем обозначения: $V = \{0, 1\}$, $V_N = \{J = (j_k) : j_k \in V, k = 1, \dots, N\}$ – множество 2^N двоичных N -векторов; $A = \{0, 1, \dots, 2^N - 1\}$ – множество из 2^N элементов; \mathcal{L} – закон распределения вероятностей; $Bi(k, p)$ – биномиальный закон распределения с параметрами k, p ; $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера. Математическую модель контейнера в достаточно общем случае можно представить последовательностью N -мерных двоичных случайных векторов-столбцов x_1, x_2, \dots, x_n :

$$x_t = (x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tN})' \in V_N, \quad t = 1, \dots, n,$$

где n определяет размер контейнера. Двоичный вектор $x_t \in V_N$ будем отождествлять с числом $\langle x_t \rangle = x_{t1} + 2^1 x_{t2} + \dots + 2^{N-1} x_{tN}$, $\langle x_t \rangle \in A$.

Рассмотрим наиболее распространенный LSB-метод встраивания сообщения в наименее значимый 1-й бит, причем механизм встраивания – «чисто случайный» [3,4]:

$$\tilde{x}_{t1} = \xi_t m_{\tau_t} + (1 - \xi_t) x_{t1} = \begin{cases} x_{t1}, \xi_t = 0, \\ m_{\tau_t}, \xi_t = 1 \end{cases}, \quad \tilde{x}_{tk} = x_{tk}, \quad k = 2, \dots, N, \quad (1)$$

$$\mathcal{L}\{\xi_t\} = Bi(1, \beta), \quad \tau_t = \tau_t(\xi_1, \dots, \xi_t) = \sum_{i=1}^t \xi_i, \quad t = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где $\tilde{x}_t = (\tilde{x}_{t1}, \dots, \tilde{x}_{tN})' \in V_N$ – контейнер, содержащий встроенное сообщение, называемый стегаконтейнером; ξ_t – последовательность независимых в совокупности случайных величин Бернулли, $P\{\xi_t = 1\} = 1 - P\{\xi_t = 0\} = \beta$, определяющая механизм встраивания сообщения; $\beta \in [0, 1]$ – доля встроенных в контейнер бит сообщения; $m_{\tau_t} \in V$ – встраиваемое сообщение. Случайные последовательности $\{x_t\}$, $\{\xi_t\}$, $\{m_t\}$ являются взаимно независимыми.

Т е о р е м а 1. Пусть $x_t \in V_N$ – последовательность одинаково распределенных двоичных случайных векторов, $m_t \in V$ – двоичная случайная последовательность, представляющая собой встраиваемое сообщение, $P\{m_t = 1\} = 1 - P\{m_t = 0\} = p_1$, а стегаконтейнер \tilde{x}_t строится согласно (1), (2). Тогда, если $\pi = (\pi_i)$ есть распределение вероятностей x_t : $\pi_i = P\{x_t = i\}$, $i \in A$, то распределение вероятностей стегаконтейнера \tilde{x}_t имеет вид:

$$\tilde{\pi}_{\langle J \rangle} = P\{\langle \tilde{x}_t \rangle = \langle J \rangle\} = P\{\tilde{x}_t = J\} = (1 - \beta)\pi_{\langle J \rangle} + \beta p_1^{j_1} (1 - p_1)^{1 - j_1} \sum_{v=0}^1 \pi_{\langle J \rangle - j_1 + v}, \quad J = (j_1, \dots, j_N)' \in V_N. \quad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле полной вероятности с учетом независимости $\{x_t\}$, $\{\xi_t\}$, $\{m_t\}$ получаем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{\langle J \rangle} &= \sum_{v=0}^1 P\{\tilde{x}_t = J, \xi_t = v\} = P\{\xi_t = 0\}P\{x_t = J\} + P\{\xi_t = 1\}P\{m_{\tau_t} = j_1\}P\{x_{t2} = j_2, \dots, x_{tN} = j_N\} = \\ &= (1 - \beta)\pi_{\langle J \rangle} + \beta p_1^{j_1} (1 - p_1)^{1 - j_1} (\pi_{\langle J \rangle - j_1} + \pi_{\langle J \rangle - j_1 + 1}). \quad \square \end{aligned}$$

С л е д с т в и е 1. Распределение вероятностей (3) стегаконтейнера \tilde{x}_t можно представить в блочном виде, содержащем 2^{N-1} двоичных двумерных подвекторов:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_i) &= (\tilde{\pi}'(0), \dots, \tilde{\pi}'(2^{N-1} - 1))', \quad i = 0, 1, \dots, 2^N - 1, \\ \tilde{\pi}(k) &= \begin{pmatrix} \tilde{\pi}_{2k} \\ \tilde{\pi}_{2k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \beta)\pi_{2k} + \beta(1 - p_1)(\pi_{2k} + \pi_{2k+1}) \\ (1 - \beta)\pi_{2k+1} + \beta p_1(\pi_{2k} + \pi_{2k+1}) \end{pmatrix}, \quad k = 0, \dots, 2^{N-1} - 1. \end{aligned}$$

Заметим, что при $p_1 = 1/2$ и $\beta = 1$ компоненты внутри каждого блока совпадают. Это свойство отмечается также в [2]. Введем в рассмотрение функционал, характеризующий указанное свойство:

$$\Delta_1(\tilde{\pi}) = \sum_{k=0}^{2^{N-1}-1} \sum_{v=0}^1 (\tilde{\pi}_{2k+v} - c_k)^2 \geq 0, \quad c_k = \frac{1}{2} \sum_{v=0}^1 \tilde{\pi}_{2k+v}. \quad (4)$$

С л е д с т в и е 2. В условиях теоремы 1, если $p_1 = 1/2$, то

$$\Delta_1(\tilde{\pi}) = (1 - \beta)^2 \Delta_1(\pi). \quad (5)$$

С л е д с т в и е 3. В условиях следствия 2, если $\beta = 1$, то $\Delta_1(\tilde{\pi}) = 0$, а если, вдобавок, $\{x_t\}$ – независимые случайные векторы, то

$$\hat{\Delta}_1 = \Delta_1(\hat{\tilde{\pi}}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0, \quad (6)$$

где $\hat{\tilde{\pi}}$ – статистическая оценка распределения вероятностей $\tilde{\pi}$ стегаконтейнера по наблюдаемой реализации $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$:

$$\hat{\tilde{\pi}}_i = v_i / n, \quad v_i = \sum_{t=1}^n \delta_{\langle \tilde{x}_t \rangle, i}, \quad i \in A.$$

Доказательство. В силу закона больших чисел $\hat{\pi}_i = v_i / n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \tilde{\pi}_i$, $i \in A$, поэтому учитывая, что $\tilde{\pi}_{2k} = \tilde{\pi}_{2k+1}$, $k = 0, \dots, 2^{N-1} - 1$ при $\beta = 1$, $p_1 = 1/2$, получаем $\Delta_1(\hat{\pi}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \Delta_1(\tilde{\pi}) = 0$.

Рассмотрим более сложную модель контейнера, учитывающую марковскую зависимость в последовательности $\{x_t\}$ двоичных N -векторов. \square

Теорема 2. Пусть x_t – стационарная цепь Маркова с пространством состояний V_N , стационарным распределением вероятностей $\pi = (\pi_i)$ и матрицей вероятностей одношаговых переходов $P = (p_{ij})$, $m_t \in V$ – последовательность независимых случайных величин, представляющая собой встраиваемое сообщение, $P\{m_t = 1\} = 1 - P\{m_t = 0\} = p_1$, а стежоконтейнер \tilde{x}_t строится согласно (1), (2). Тогда для двумерного распределения вероятностей $\tilde{\pi}_{\langle J \rangle, \langle K \rangle} = P\{\tilde{x}_{t-1} = J, \tilde{x}_t = K\}$, $J, K \in V_N$, стежоконтейнера \tilde{x}_t справедливо выражение:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{\langle J \rangle, \langle K \rangle} &= (1 - \beta)^2 \pi_{\langle J \rangle} p_{\langle J \rangle, \langle K \rangle} + \beta(1 - \beta) p_1^{k_1} (1 - p_1)^{1 - k_1} \sum_{v=0}^1 \pi_{\langle J \rangle} p_{\langle J \rangle, \langle K \rangle - k_1 + v} + \\ & p_1^{j_1} (1 - p_1)^{1 - j_1} \sum_{v=0}^1 \pi_{\langle J \rangle - j_1 + v} p_{\langle J \rangle - j_1 + v, \langle K \rangle} + \beta^2 p_1^{j_1 + k_1} (1 - p_1)^{2 - (j_1 + k_1)} \sum_{v, h=0}^1 \pi_{\langle J \rangle - j_1 + v} p_{\langle J \rangle - j_1 + v, \langle K \rangle - k_1 + h}. \end{aligned}$$

Доказательство. По формуле полной вероятности с учетом стационарности цепи x_t и независимости $\{x_t\}$, $\{\xi_t\}$, $\{m_t\}$ имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{\langle J \rangle, \langle K \rangle} &= \sum_{v, h=0}^1 P\{\tilde{x}_t = K, \xi_t = v, \tilde{x}_{t-1} = J, \xi_{t-1} = h\} = (1 - \beta)^2 P\{x_t = K, x_{t-1} = J\} + \\ & \beta(1 - \beta) P\{m_{\tau_t} = k_1, x_{t_2} = k_2, \dots, x_{t_N} = k_N, x_{t-1} = J\} + \beta(1 - \beta) P\{x_t = K, m_{\tau_{t-1}} = j_1, x_{t-1,2} = j_2, \dots, x_{t-1,N} = j_N\} + \\ & \beta^2 P\{m_{\tau_t} = k_1, x_{t_2} = k_2, \dots, x_{t_N} = k_N, m_{\tau_{t-1}} = j_1, x_{t-1,2} = j_2, \dots, x_{t-1,N} = j_N\} = (1 - \beta)^2 \pi_{\langle J \rangle} p_{\langle J \rangle, \langle K \rangle} + \\ & \beta(1 - \beta) p_1^{k_1} (1 - p_1)^{1 - k_1} \sum_{v=0}^1 \pi_{\langle J \rangle} p_{\langle J \rangle, \langle K \rangle - k_1 + v} + p_1^{j_1} (1 - p_1)^{1 - j_1} \sum_{v=0}^1 \pi_{\langle J \rangle - j_1 + v} p_{\langle J \rangle - j_1 + v, \langle K \rangle} + \\ & \beta^2 p_1^{j_1 + k_1} (1 - p_1)^{2 - (j_1 + k_1)} \sum_{v, h=0}^1 \pi_{\langle J \rangle - j_1 + v} p_{\langle J \rangle - j_1 + v, \langle K \rangle - k_1 + h}. \quad \square \end{aligned}$$

Заметим, что последовательность \tilde{x}_t вообще говоря не является цепью Маркова.

Следствие 4. Если $\beta = 1, p_1 = 1/2$, то

$$\tilde{\Delta}_2 = \Delta_2(\{\tilde{\pi}_{\langle J \rangle, \langle K \rangle}\}) = \sum_{k=0}^{2^{N-1}-1} \sum_{l=0}^{2^{N-1}-1} \sum_{v_1, v_2=0}^1 (\hat{\pi}_{2k+v_1, 2l+v_2} - \tilde{c}_{k,l})^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0, \quad (7)$$

где $\hat{\pi}_{i,j} = \sum_{t=2}^n \delta_{\langle \tilde{x}_{t-1} \rangle, i} \delta_{\langle \tilde{x}_t \rangle, j} / (n-1)$, $i, j \in A$, $\tilde{c}_{k,l} = \sum_{v_1, v_2=0}^1 \hat{\pi}_{2k+v_1, 2l+v_2} / 4$.

Рассмотрим более общий случай, когда сообщение встраивается в N_1 наименее значимых бит. Обозначим: $N = N_1 + N_2$, $1 \leq N_1 \leq N$, $m_\tau = (m_{\tau_1}, \dots, m_{\tau_{N_1}}) \in V_{N_1}$, $J = (J_{(1)}', J_{(2)}')' \in V_N, J_{(1)} \in V_{N_1}$, $\tilde{x}_t = (\tilde{x}_{t(1)}', \tilde{x}_{t(2)}')'$, $\tilde{x}_{t(1)} \in V_{N_1}, \tilde{x}_{t(2)} \in V_{N-N_1}$. Стежоконтейнер \tilde{x}_t строится согласно обобщению (1):

$$\tilde{x}_{t(2)} = x_{t(2)}, \quad \tilde{x}_{t(1)} = \xi_t m_{\tau_t} + (1 - \xi_t) x_{t(1)} = \begin{cases} x_{t(1)}, \xi_t = 0, \\ m_{\tau_t}, \xi_t = 1, \end{cases} \quad t = 1, \dots, n, \quad (8)$$

где случайные величины $\{\xi_t\}$ и функция τ_t определены в (2). Теорема 2 допускает следующее обобщение на случай $N_1 > 1$.

Т е о р е м а 3. Пусть x_t – стационарная цепь Маркова с пространством состояний V_N , стационарным распределением вероятностей $\pi = (\pi_i)$ и матрицей вероятностей одношаговых переходов $P = (p_{ij})$, $m_t \in V_{N_1}$ – последовательность независимых случайных векторов, представляющая собой встраиваемое сообщение, $P\{m_t = J_{(1)}\} = p_{\langle J_{(1)} \rangle}$, $J_{(1)} \in V_{N_1}$, а стегоконтейнер строится согласно (8). Тогда для двумерного распределения вероятностей $\tilde{\pi}_{\langle J \rangle, \langle K \rangle} = P\{\tilde{x}_{t-1} = J, \tilde{x}_t = K\}$, $J, K \in V_N$, стегоконтейнера \tilde{x}_t справедливо выражение:

$$\tilde{\pi}_{\langle J \rangle, \langle K \rangle} = (1-\beta)^2 \pi_{\langle J \rangle} p_{\langle J \rangle, \langle K \rangle} + \beta(1-\beta) \left(p_{\langle K_{(1)} \rangle} \sum_{v=0}^{2^{N_1-1}} \pi_{\langle J \rangle} p_{\langle J \rangle, 2^{N_1} \langle K_{(2)} \rangle + v} + \right. \\ \left. p_{\langle J_{(1)} \rangle} \sum_{v=0}^{2^{N_1-1}} \pi_{2^{N_1} \langle J_{(2)} \rangle + v} p_{2^{N_1} \langle J_{(2)} \rangle + v, \langle K \rangle} \right) + \beta^2 p_{\langle J_{(1)} \rangle} p_{\langle K_{(1)} \rangle} \sum_{v, h=0}^{2^{N_1-1}} \pi_{2^{N_1} \langle J_{(2)} \rangle + v} p_{2^{N_1} \langle J_{(2)} \rangle + v, 2^{N_1} \langle K_{(2)} \rangle + h}.$$

Для исследования вероятностных свойств стегоконтейнеров рассмотрим два численных примера с модельными данными.

Пример 1. Последовательность x_t из независимых случайных векторов и случайная последовательность m_t моделировались согласно условиям теоремы 1 при следующих значениях параметров: $N = 4$, $N_1 = 1$, $p_1 = \frac{1}{2}$, $\beta = 0,30$, $\pi = \frac{1}{80}(2,3,8,5,1,5,2,7,2,11,5,4,3,12,2,8)'$. На рис. 1 изображен

вычисленный согласно (6) график зависимости статистики $\hat{\Delta}_1$ от размера наблюдаемой последовательности n . Кружочками изображен график для стегоконтейнера, а сплошной линией – для чистого контейнера. Пунктирные линии соответствуют теоретическим значениям функции Δ_1 для контейнера и стегоконтейнера, вычисленным согласно (4), (5).

Пример 2. Приведем значения параметров, при которых согласно условиям теоремы 2 моделировался контейнер x_t :

$$N = 2, N_1 = 1, p_1 = \frac{1}{2}, P = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 & 4 \\ 8 & 5 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

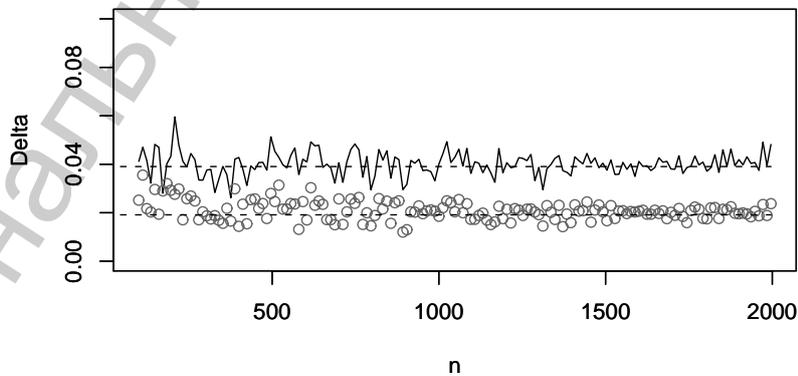


Рис. 1. Зависимость $\hat{\Delta}_1$ от длительности n

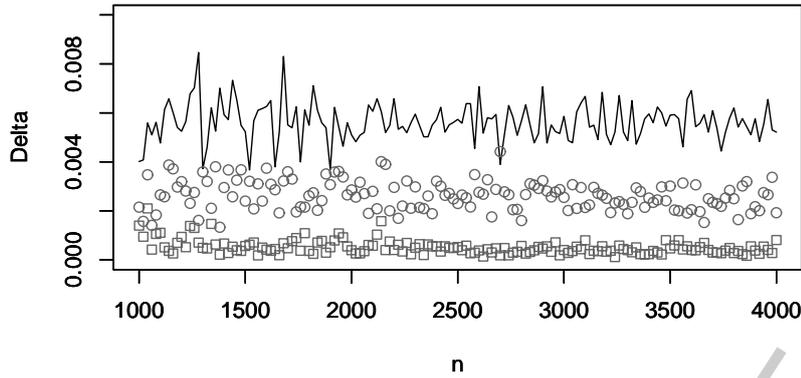


Рис. 2. Зависимость $\hat{\Delta}_2$ от длительности n

На рис. 2 изображен вычисленный согласно (7) график зависимости статистики $\hat{\Delta}_2$ от размера наблюдаемой последовательности n . Сплошной линией изображен график для чистого контейнера, кружочками и квадратиками – для стегоконтейнера при $\beta = 0,25$ и $\beta = 0,75$ соответственно. Видно, что чем меньше β и n , тем сложнее обнаружить факт встраивания сообщения.

Статистическая проверка гипотез о встраивании сообщения. Пусть контейнер $\{x_t\}$ есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных двоичных N -векторов с некоторым фиксированным дискретным распределением вероятностей: $\pi^0 = (\pi_i^0)$, $\pi_i^0 = P\{x_t = i\}$, $i \in A$. Маргинальное p -мерное распределение вероятностей подвектора $(x_{t1}, \dots, x_{tp})' \in V_p$, $p \leq N$, имеет вид:

$$\kappa_{<J>}^0 = P\{x_{t1} = j_1, \dots, x_{tp} = j_p\} = \sum_{v=0}^{2^{N-p}-1} \pi_{2^p v + <J>}^0, \quad J \in V_p.$$

Наблюдается последовательность $\tilde{X} = (\tilde{x}_{t1}, \tilde{x}_{t2}, \dots, \tilde{x}_{tn})' \in V_{nN}$ конечного размера n . Построим оптимальный по критерию минимума вероятности ошибки 2-го рода (при фиксированной вероятности ошибки 1-го рода) статистический тест Неймана–Пирсона проверки гипотез: H_0 : $\{\tilde{X}$ – чистый контейнер} и $H_1 = \bar{H}_0$: $\{\tilde{X}$ – стегоконтейнер, т. е. содержит скрытое сообщение}. При этом вероятность ошибки 1-го рода предполагается фиксированной на уровне $\epsilon \in (0, 1)$. Гипотезы H_0, H_1 представим в виде:

$$H_0: \kappa = \kappa^0, \quad H_1: \kappa \neq \kappa^0,$$

где $\kappa = (\kappa_i)$ – маргинальное p -мерное распределение вероятностей подвектора $(\tilde{x}_{t1}, \dots, \tilde{x}_{tp})' \in V_p$, $N_1 \leq p \leq N$: $\kappa_{<J>} = P\{\tilde{x}_{t1} = j_1, \dots, \tilde{x}_{tp} = j_p\}$, $J = (j_1, \dots, j_p)' \in V_p$. Тогда статистический тест имеет вид [6]:

$$d = d(\tilde{X}) = \begin{cases} 0, & T_p(\tilde{X}) < \delta, \\ 1, & T_p(\tilde{X}) \geq \delta \end{cases}, \quad T_p(\tilde{X}) = \sum_{i=0}^{2^p-1} \frac{(v_i - n\kappa_i^0)^2}{n\kappa_i^0}, \quad (9)$$

где $v_i = \sum_{t=1}^n \delta_{<(\tilde{x}_{t1}, \dots, \tilde{x}_{tp})', i>}$, $i = 0, \dots, 2^p - 1$; δ – критическое значение статистики T_p . При справедливой гипотезе H_0 асимптотическое распределение вероятностей статистики $T_p(\tilde{X})$ теста (9)

при $n \rightarrow \infty$ есть χ^2 -распределение с числом степеней свободы $2^p - 1$ [7]. Если ϵ – заданный уровень значимости, то критическое значение статистики (9) равно

$$\delta = (\chi_{2^p-1}^2)^{-1}(1-\epsilon),$$

где $(\chi_{2^p-1}^2)^{-1}(1-\epsilon)$ – квантиль уровня $1-\epsilon$ для χ^2 -распределения с $2^p - 1$ степенями свободы, $0 < \epsilon < 1$.

Для анализа мощности статистического теста (9) будем предполагать, что верна альтернатива H_1 и распределение вероятностей стегаконтейнера имеет вид:

$$\kappa = \kappa^1 = \kappa^0 + \gamma,$$

где $\kappa^0 = (\kappa_0^0, \kappa_1^0, \dots, \kappa_{2^p-1}^0)$, $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2^p-1})$, причем

$$\sum_{i=0}^{2^p-1} \gamma_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{2^p-1} \gamma_i^2 > 0, \quad -\kappa_i^0 < \gamma_i < 1 - \kappa_i^0, \quad i = 0, 1, \dots, 2^p - 1.$$

Т е о р е м а 4. При справедливой альтернативе H_1 , когда $\kappa = \kappa^1 = (\kappa_i^1) = \kappa^0 + \gamma$, асимптотическое распределение вероятностей статистики $T_p(\tilde{X})$, определяемой (9), при $n \rightarrow +\infty$ есть нецентральное χ^2 -распределение с числом степеней свободы $2^p - 1$ и параметром нецентральности

$$\lambda_n^2 = ng(\kappa^0, \gamma), \quad g(\kappa^0, \gamma) = \sum_{i=0}^{2^p-1} \gamma_i^2 / \kappa_i^0. \quad (10)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим математическое ожидание статистики $T_p(\tilde{X})$ при справедливой гипотезе H_1 . Для этого статистику $T_p(\tilde{X})$ представим в виде:

$$T_p(\tilde{X}) = \sum_{i=0}^{2^p-1} \frac{(v_i - n\kappa_i^1)^2}{n\kappa_i^0} + 2 \sum_{i=0}^{2^p-1} \frac{(v_i - n\kappa_i^1)(\kappa_i^1 - \kappa_i^0)}{\kappa_i^0} + n \sum_{i=0}^{2^p-1} \frac{(\kappa_i^1 - \kappa_i^0)^2}{\kappa_i^0}.$$

Так как $E\{v_i | H_1\} = n\kappa_i^1$, $D\{v_i | H_1\} = E\{(v_i - n\kappa_i^1)^2 | H_1\} = n\kappa_i^1(1 - \kappa_i^1)$, то

$$E\{T_p(\tilde{X}) | H_1\} = n \sum_{i=0}^{2^p-1} \frac{(\kappa_i^1 - \kappa_i^0)^2}{\kappa_i^0} + \sum_{i=0}^{2^p-1} \frac{\kappa_i^1(1 - \kappa_i^1)}{\kappa_i^0}.$$

При $n \rightarrow +\infty$ имеем:

$$E\{T_p(\tilde{X}) | H_1\} = 2^p - 1 + \lambda_n^2 + o(1). \quad (11)$$

Заметим, что $E\{T_p(\tilde{X}) | H_0\} = 2^p - 1$, что согласуется с асимптотическим результатом из [7]. Из [7] с учетом (11) следует, что асимптотическое распределение вероятностей статистики $T_p(\tilde{X})$ есть нецентральное χ^2 -распределение с числом степеней свободы $2^p - 1$ и параметром нецентральности λ_n^2 . \square

Отметим, что результат теоремы 4 согласуется с результатами из [4].

Определим минимальное число $n^* = n^*(w^*)$ наблюдений $\{\tilde{x}_i\}$, необходимых для того, чтобы обнаружить отклонение от гипотезы H_0 с заданной мощностью $w \geq w^*$. В силу теоремы 4

$$n^* = n^*(w^*) = \min_n \{ \chi_{2^p-2, \lambda_n^2}^2(\delta) \leq 1 - w^* \},$$

где $\chi_{2^p-1, \lambda_n^2}^2(\cdot)$ – функция нецентрального χ^2 -распределения с числом степеней свободы $2^p - 1$ и параметром нецентральности λ_n^2 .

Т е о р е м а 5. Пусть $x_t \in V_N$ – последовательность независимых одинаково распределенных двоичных случайных векторов, $m_t \in V_{N_1}$ – последовательность независимых равномерно распределенных случайных векторов, представляющая собой встраиваемое сообщение, $P\{m_t = J_{(1)}\} = 1/2^{N_1}$, $J_{(1)} \in V_{N_1}$, а стегоконтейнер получается согласно (8). Тогда, если $\pi^0 = (\pi_i^0)$ есть распределение вероятностей x_t : $\pi_i^0 = P\{x_t = i\}$, $i \in A$, то параметр нецентральности асимптотического χ^2 -распределения статистики $T_N(\tilde{X})$ теста (9) при справедливой альтернативе $H_1: \{\beta > 0\}$ имеет вид:

$$\lambda_n^2 = n\beta^2 \sum_{J \in V_N} \frac{s_1(J)^2}{\pi_{<J>}^0}, \quad s_1(J) = \frac{1}{2^{N_1}} \sum_{h=0}^{2^{N_1}-1} \pi_{2^{N_1} <J_{(2)>+h}^0} - \pi_{<J>}^0, \quad (12)$$

где $J = (J_{(1)}', J_{(2)}')' \in V_N$ – разбиение на подвекторы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся теоремой 4 при $p = N$ и вычислим параметр нецентральности, применяя (10):

$$\lambda_n^2 = n \sum_{J \in V_N} \frac{\gamma_{<J>}^2}{\pi_{<J>}^0} = n \sum_{J \in V_N} \frac{1}{\pi_{<J>}^0} (\pi_{<J>}^1 - \pi_{<J>}^0)^2.$$

Здесь $\pi_{<J>}^1 = P\{\tilde{x}_t = J\}$ – распределение вероятностей стегоконтейнера \tilde{x}_t , порожденного согласно (8):

$$\begin{aligned} \pi_{<J>}^1 &= P\{\tilde{x}_t = J\} = \sum_{v=0}^1 P\{\tilde{x}_t = J, \xi_t = v\} = P\{\xi_t = 0\}P\{x_t = J\} + P\{\xi_t = 1\}P\{m_{\tau_t} = J_{(1)}\}P\{x_{t(2)} = J_{(2)}\} = \\ &= (1-\beta)\pi_{<J>}^0 + \beta \frac{1}{2^{N_1}} \sum_{h=0}^{2^{N_1}-1} \pi_{2^{N_1} <J_{(2)>+h}^0}. \end{aligned}$$

Следовательно, параметр нецентральности имеет вид:

$$\lambda_n^2 = n \sum_{J \in V_N} \frac{1}{\pi_{<J>}^0} \left((1-\beta)\pi_{<J>}^0 + \beta \frac{1}{2^{N_1}} \sum_{h=0}^{2^{N_1}-1} \pi_{2^{N_1} <J_{(2)>+h}^0} - \pi_{<J>}^0 \right)^2 = n\beta^2 \sum_{J \in V_N} \frac{s_1(J)^2}{\pi_{<J>}^0}.$$

Для оценивания минимального числа наблюдений $n^* = n^*(w^*)$, необходимых для обнаружения отклонения от гипотезы H_0 с заданной мощностью w^* , и исследования влияния доли встроенных данных β на мощность теста проведены численные эксперименты.

Пример 3. Асимптотическая мощность теста (9) вычислялась при следующих условиях: уровень значимости $\epsilon = 0,01$, число степеней свободы $d = 15$ и $g(\kappa^0, \gamma) = 0,15$, где величина $g(\kappa^0, \gamma)$, определяемая в (10), характеризует класс альтернатив. На рис. 3 изображен график зависимости асимптотической функции мощности от размера стегоконтейнера n . Видно, например, что $n^* = 237$ наблюдений достаточно, чтобы обнаруживать заданные величиной $g(\kappa^0, \gamma) = 0,15$ отклонения от гипотезы H_0 с требуемой мощностью $w^* = 0,95$.

Пример 4. Вычисление мощности теста (9) проводилось с использованием теоремы 5 при следующих значениях параметров: $N = 4$, $N_1 = 1$, $\pi^0 = \frac{1}{80}(2,8,5,7,5,3,5,5,4,6,4,5,8,3,5,5)'$. На рис. 4

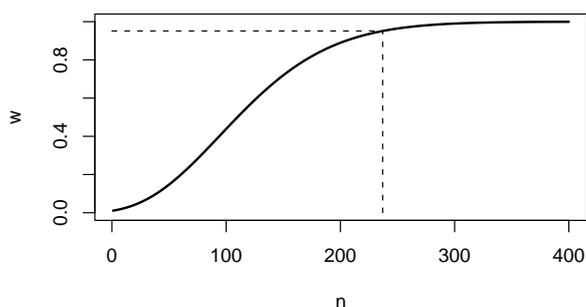


Рис. 3. Зависимость мощности w от числа наблюдений n

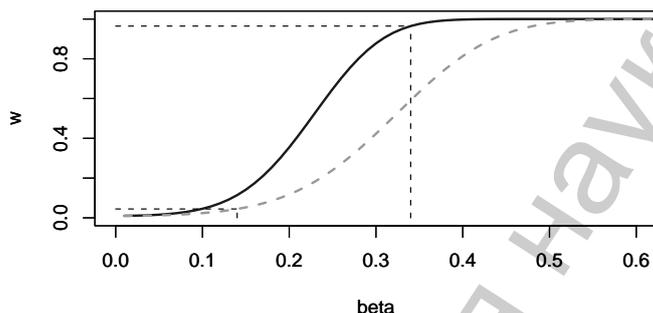


Рис. 4. Зависимость мощности w от доли встроенных данных β

представлены графики зависимости асимптотической мощности теста от доли встроенных данных β . Сплошной линией изображен график в случае, когда размер стежоконтейнера $n = 4000$, а пунктирной линией – при $n = 2000$. Если $\beta > 0,34$, $n = 4000$, то вероятность обнаружения факта встраивания сообщения больше 0,95. В случае, когда $\beta < 0,14$, $n = 2000$, вероятность обнаружения факта встраивания сообщения меньше 0,05.

Аналогично (9) можно построить статистический тест проверки гипотез в ситуации, когда чистый контейнер $\{x_t\}$ есть однородная цепь Маркова с некоторой матрицей вероятностей одношаговых переходов $P^0 = (p_{ij}^0)$, $p_{ij}^0 = P\{x_t = j | x_{t-1} = i\}$, $i, j \in A$. Пусть наблюдается последовательность $\tilde{X} = (\tilde{x}'_1, \dots, \tilde{x}'_n)'$ конечной длины n . Статистический тест проверки гипотез $H_0 : P = P^0$, $H_1 : P \neq P^0$ согласно [8] имеет вид:

$$d = d(\tilde{X}) = \begin{cases} 0, & T(\tilde{X}) < \delta, \\ 1, & T(\tilde{X}) \geq \delta \end{cases}, \quad T(\tilde{X}) = \sum_{i,j \in A} \frac{(f_{ij} - f_i p_{ij}^0)^2}{f_i p_{ij}^0},$$

где $f_{ij} = \sum_{t=2}^n \delta_{\langle \tilde{x}_{t-1}, i \rangle} \delta_{\langle \tilde{x}_t, j \rangle}$, $f_i = \sum_{t=1}^n \delta_{\langle \tilde{x}_t, i \rangle}$, $i, j \in A$, критическое значение $\delta = (\chi_{2N(2N-1)}^2)^{-1}(1-\epsilon)$, уровень значимости $\epsilon \in (0,1)$.

Заключение. В данной статье получены следующие основные результаты: установлены новые вероятностные свойства стежоконтейнеров для схемы независимых испытаний и марковской модели; построены статистические тесты проверки гипотез о том, что наблюдаемая последовательность содержит скрытое сообщение, и исследована их мощность; проведено исследование факторов, влияющих на точность обнаружения скрытого сообщения; проведены численные эксперименты на модельных данных и проиллюстрировано их согласие с теоретическими результатами.

Литература

1. Anderson R. J. Stretching the Limits of Steganography. Lecture Notes In Computer Science. Vol. 1174. London: Springer-Verlag, 1996.
2. Westfeld A., Pfitzmann A. Attacks on Steganographic Systems. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 1768. Springer-Verlag, 2000.
3. Грибунин В. Г. Цифровая стеганография. М., 2002.
4. Пономарев К. И. // Дискретная математика. 2009. Т. 21. С. 148–157.
5. Вечерко Е. В., Харин Ю. С. // Материалы международной конференции Информационные системы и технологии. Минск, 2009. С. 14–18.
6. Sharp T. An Implementation of Key-Based Digital Signal Steganography. Lecture Notes In Computer Science. Vol. 2137. Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
7. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Математическая статистика. М., 1984.
8. Billingsley P. // Ann. Math. Statist. 1961. Vol. 32. P. 12–40.

Yu. S. KHARIN, E. V. VECHERKO

SOME PROBLEMS OF STATISTICAL HYPOTHESES TESTING IN STEGANOGRAPHY

Summary

In this article we analyze the mathematical models of embedding and constructing statistical tests for detection of embedded messages.

УДК 519.2

Е. Е. ЖУК

УСТОЙЧИВОСТЬ БАЙЕСОВСКОГО РЕШАЮЩЕГО ПРАВИЛА ПРИ НЕТОЧНО ЗАДАНЫХ АПРИОРНЫХ ВЕРОЯТНОСТЯХ КЛАССОВ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 29.01.2010)

1. Статистическая классификация и проблема задания априорных вероятностей классов. Пусть в пространстве R^N ($N \geq 1$) регистрируются случайные наблюдения $x \in R^N$ из $L \geq 2$ классов $\{\Omega_1, \dots, \Omega_L\}$. Наблюдение x принадлежит к классу со случайным номером $d^o \in S$ ($S = \{1, \dots, L\}$ – множество номеров классов):

$$P\{d^o = i\} = \pi_i^o > 0, \quad i \in S; \quad (1)$$

$$\sum_{i \in S} \pi_i^o = 1,$$

где $\{\pi_i^o\}_{i \in S}$ – так называемые априорные вероятности классов $\{\Omega_i\}_{i \in S}$ [1, 2]. При фиксированном номере $d^o = i$ наблюдения из класса Ω_i описываются условной плотностью распределения вероятностей [1, 2]:

$$p_i(x) \geq 0, \quad x \in R^N; \quad \int_{R^N} p_i(x) dx = 1, \quad i \in S, \quad (2)$$

где плотности $\{p_i(\cdot)\}_{i \in S}$ в (2) могут быть параметризованы [1, 2]: $p_i(x) = p(x; \theta_i^o)$, $\theta_i^o \in \Theta \subseteq R^m$ ($m \geq 1$), $i \in S$.

На практике характеристики классов $\{\pi_i^o, p_i(\cdot)\}_{i \in S}$ из (1), (2) частично или полностью неизвестны наряду с истинным номером класса $d^o \in S$ для наблюдения $x \in R^N$. Задача статистической классификации заключается в построении решающего правила (РП) [1, 2]: $d = d(x) : R^N \rightarrow S$, являющегося статистической оценкой для d^o и относящего наблюдение x к одному из классов $\{\Omega_i\}_{i \in S}$ ($d \in S$).

В качестве критерия эффективности РП $d = d(x) \in S$, $x \in R^N$, используется риск, имеющий смысл средних (ожидаемых) потерь при классификации: $r = r(d) = E\{w_{d^o, d(x)}\}$, где $W = (w_{ij})_{i, j \in S}$ – матрица потерь: w_{ij} – величина («цена») потерь при отнесении наблюдений, принадлежащих классу Ω_i , в класс Ω_j . Известно [1, 2], что наименьшие потери гарантирует байесовское решающее правило (БРП):

$$d_o(x) = d(x; \pi^o) = \arg \min_{j \in S} f_j(x; \pi^o), \quad x \in R^N; \quad (3)$$

$$f_j(x; \pi^o) = \sum_{i \in S} \pi_i^o w_{ij} p_i(x), \quad j \in S,$$

обладающее минимально возможным значением риска:

$$r_o = r(d_o) = \int_{R^N} \min_{j \in S} f_j(x; \pi^o) dx. \quad (4)$$

В приложениях чаще всего имеет место случай дискриминантного анализа [1, 2], когда информация о неизвестных характеристиках $\{\pi_i^o, p_i(\cdot)\}_{i \in S}$ классов $\{\Omega_i\}_{i \in S}$ восполняется по так называемой классифицированной обучающей выборке $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ объема n , для которой известен вектор истинной классификации $D^o = (d_1^o, \dots, d_n^o)^T \in S^n$, где $d_t^o \in S$ – истинный номер класса для наблюдения $x_t \in R^N$ ($t = \overline{1, n}$), а « T » – символ транспонирования, что позволяет «разбить» выборку X на $L \geq 2$ выборок $\{X^{(i)}\}_{i \in S}$: i -я выборка $X^{(i)} = \{x_t \in X : d_t^o = i\}$ содержит наблюдения, принадлежащие классу Ω_i , и имеет объем

$$n_i = \sum_{t=1}^n \delta_{d_t^o, i}, \quad i \in S; \quad (5)$$

$$\sum_{i \in S} n_i = n,$$

где $\delta_{j,i} = \{1, \text{ если } j = i; 0, \text{ если } j \neq i\}$ – символ Кронекера. Затем строится РП по подстановочному принципу [1–3], получающееся из БРП (3) заменой неизвестных $\{\pi_i^o, p_i(\cdot)\}_{i \in S}$ на их статистические оценки $\{\hat{\pi}_i, \hat{p}_i(\cdot)\}_{i \in S}$, где $\hat{p}_i(\cdot)$ – оценка условной плотности $p_i(\cdot)$ из (2) по выборке $X^{(i)}$ объема n_i ($\hat{p}_i(\cdot) \equiv p_i(\cdot; \hat{\theta}_i)$, $\hat{\theta}_i$ – оценка θ_i^o в параметрическом случае). Априорные вероятности $\{\pi_i^o\}_{i \in S}$ из (1) при этом чаще всего оцениваются как доли наблюдений из выборки X , попавшие согласно D^o в тот или иной класс:

$$\hat{\pi}_i = \frac{n_i}{n}, \quad i \in S; \quad (6)$$

$$\sum_{i \in S} \hat{\pi}_i = 1.$$

В случае, когда номера классов $\{d_t^o\}_{t=1}^n$ в векторе истинной классификации D^o независимы в совокупности и одинаково распределены с дискретным распределением вероятностей (1), оценки (6) строго состоятельны (в смысле сходимости почти наверное) [2]: $\hat{\pi}_i \xrightarrow{n.n.} \pi_i^o$, $n \rightarrow +\infty$, $i \in S$, и достаточно точно оценивают истинные значения априорных вероятностей из (1).

Однако на практике зачастую вместо выборки X объема n и соответствующего ей вектора истинной классификации $D^o \in S^n$ доступны непосредственно выборки $\{X^{(i)}\}_{i \in S}$, хоть и содержащие наблюдения из классов $\{\Omega_i\}_{i \in S}$ соответственно, но имеющие объемы $\{n_i\}_{i \in S}$, не пропорциональные истинным значениям априорных вероятностей $\{\pi_i^o\}_{i \in S}$ из (1). В этой ситуации, даже при $n_i \rightarrow +\infty$, $i \in S$, оценки априорных вероятностей $\{\hat{\pi}_i\}_{i \in S}$ из (6) могут существенно отклоняться от $\{\pi_i^o\}_{i \in S}$, «сходясь» при этом к некоторым значениям:

$$\pi_i = \pi_i^o + \varepsilon_i, \quad i \in S; \quad (7)$$

$$\sum_{i \in S} \pi_i = 1,$$

где $\{\varepsilon_i\}_{i \in S}$ – отклонения от соответствующих истинных значений из (1):

$$\begin{aligned} -\pi_i^o < \varepsilon_i < 1 - \pi_i^o, \quad i \in S; \\ \sum_{i \in S} \varepsilon_i = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Степень этих отклонений будем характеризовать величиной:

$$\varepsilon_+ = \max_{i \in S} |\varepsilon_i|, \quad (9)$$

которую назовем уровнем отклонений. Чем меньше ε_+ , тем ближе $\{\pi_i\}_{i \in S}$ из (7) к истинным значениям $\{\pi_i^o\}_{i \in S}$ из (1), и при $\varepsilon_+ = 0$: $\pi_i = \pi_i^o$, $i \in S$.

Оценки же $\{\hat{p}_i(\cdot)\}_{i \in S}$ для условных плотностей $\{p_i(\cdot)\}_{i \in S}$ из (2) чаще всего сохраняют свои статистические свойства [2]. Так, если при параметрическом задании плотностей $\{p_i(\cdot) \equiv p(\cdot; \theta_i^o)\}_{i \in S}$ в качестве оценок $\{\hat{\theta}_i\}_{i \in S}$ параметров $\{\theta_i^o\}_{i \in S}$ используются оценки максимального правдоподобия [2], то при весьма общих условиях регулярности [2] оценки плотностей $\{\hat{p}_i(\cdot) \equiv p(\cdot; \hat{\theta}_i)\}_{i \in S}$ на их основе оказываются строго состоятельными: $\hat{p}_i(x) \xrightarrow{n.H.} p_i(x)$, $x \in R^N$, $n_i \rightarrow +\infty$, $i \in S$. Поэтому далее везде при проведении исследований, не ограничивая общности, будем считать, что плотности $\{p_i(\cdot)\}_{i \in S}$ из (2), описывающие классы $\{\Omega_i\}_{i \in S}$, заданы точно и по обучающим выборкам $\{X^{(i)}\}_{i \in S}$ не оцениваются, что близко к ситуации, когда объемы обучающих выборок $\{n_i\}_{i \in S}$ достаточно велики: $n_i \rightarrow +\infty$, $i \in S$.

Более того, в описанной выше ситуации, чтобы избежать некорректного оценивания в (6), иногда оценки априорных вероятностей определяются «напрямую» (так называемые «экспертные оценки» [1]), и можно считать, что $\{\hat{\pi}_i := \pi_i\}_{i \in S}$ – задаваемые с ошибками (отклонениями) априорные вероятности из (7), где величины $\{\varepsilon_i\}_{i \in S}$ из (8) – неслучайные ошибки «экспертов».

В связи со сказанным выше, представляет интерес выяснить, насколько «чувствительно» БРП (3) к ошибкам в задании априорных вероятностей.

2. Асимптотическое исследование риска классификации при неточно заданных априорных вероятностях классов. Пусть в БРП $d(\cdot; \pi^o)$ из (3) вместо истинных значений априорных вероятностей $\pi^o = (\pi_1^o, \dots, \pi_L^o)^T$ из (1) используются отличные от них априорные вероятности $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_L)^T$, определяемые (7), (8). Эффективность такого РП $d(\cdot; \pi)$ характеризуется риском [1–3]:

$$r(d) = E\{w_{d^o, d(x, \pi)}\} = R(\pi, \pi^o) = \sum_{i \in S} \pi_i^o \sum_{j \in S} w_{ij} \int_{R^N} \prod_{\substack{k \in S \\ k \neq j}} U(f_{kj}(x; \pi)) p_i(x) dx, \quad (10)$$

где

$$f_{kj}(x; \pi) = f_k(x; \pi) - f_j(x; \pi), \quad x \in R^N, \quad k \neq j \in S, \quad (11)$$

$\{f_j(\cdot; \pi)\}_{j \in S}$ определены в (3), а $U(z) = \{1, \text{ если } z \geq 0; 0, \text{ если } z < 0\}$ – единичная функция Хэвисайда. При этом $r_o = R(\pi^o, \pi^o)$ – риск (4) БРП $d(\cdot; \pi^o)$ из (3), и $r_o = R(\pi^o, \pi^o) \leq R(\pi, \pi^o)$, $\forall \pi$ из (7), (8).

Исследуем, насколько влияют неточности в задании априорных вероятностей на эффективность РП $d(\cdot; \pi)$ типа (3) (насколько увеличивается его риск $R(\pi, \pi^o)$ из (10) по отношению к оптимальному байесовскому значению r_o из (4)). Введем обозначения ($k \neq j \in S$; $x \in R^N$):

$$\tilde{\Gamma}_{kj}(\pi) = \{x: f_{kj}(x; \pi) = 0\}; U_{jk}(x; \pi) = \prod_{\substack{i \in S \\ i \neq j, i \neq k}} U(f_{ij}(x; \pi)); \quad (12)$$

$\Gamma_{kj}(\pi) = \tilde{\Gamma}_{kj}(\pi) \cap \{x: U_{jk}(x; \pi) = 1\}$ – фрагмент поверхности $\tilde{\Gamma}_{kj}(\pi) \subset R^{N-1}$, принадлежащий области $\{x: U_{jk}(x; \pi) = 1\} \subset R^N$ (при $L = 2$ полагаем $\Gamma_{12}(\pi) := \tilde{\Gamma}_{12}(\pi)$).

Т е о р е м а. Пусть характеристики $\{\pi_i^o, p_i(\cdot)\}_{i \in S}$ классов $\{\Omega_i\}_{i \in S}$ определяются (1), (2), и конечны поверхностные интегралы $(t, s, k, j \in S, k \neq j)$:

$$J_{tskj}(\pi^o) = \int_{\Gamma_{kj}(\pi^o)} p_t(x) p_s(x) \left| \nabla_x f_{kj}(x; \pi^o) \right|^{-1} dS_{N-1} < +\infty, \quad (13)$$

где использованы обозначения (11), (12), а $\nabla_x f_{kj}(x; \pi^o) \in R^N$ – вектор частных производных первого порядка от функции $f_{kj}(x; \pi^o)$ по $x \in R^N$. Тогда при малых отклонениях (8) в априорных вероятностях (7): $\varepsilon_+ \rightarrow 0$, риск $R(\pi, \pi^o)$ из (10) допускает асимптотическое представление:

$$R(\pi, \pi^o) = r_o + \frac{1}{2} \sum_{t, s \in S} \sum_{j=2}^L \sum_{k=1}^{j-1} (w_{tk} - w_{tj})(w_{sk} - w_{sj}) J_{tskj}(\pi^o) \varepsilon_t \varepsilon_s + O(\varepsilon_+^3), \quad (14)$$

где r_o – байесовский риск из (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся методом асимптотического разложения риска [3] и разложим риск $R(\pi, \pi^o)$ в ряд Тейлора по $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_L)^T$ в точке π^o с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$R(\pi, \pi^o) = r_o + (\nabla_{\pi} R(\pi, \pi^o)|_{\pi=\pi^o})^T (\pi - \pi^o) + \frac{1}{2} (\pi - \pi^o)^T \nabla_{\pi}^2 R(\pi, \pi^o)|_{\pi=\pi^o} (\pi - \pi^o) + O(|\pi - \pi^o|^3),$$

где $\nabla_{\pi} R(\pi, \pi^o)$ – L -вектор, а $\nabla_{\pi}^2 R(\pi, \pi^o)$ – $(L \times L)$ -матрица частных производных первого и второго порядков от $R(\pi, \pi^o)$ по π , а $\pi - \pi^o = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_L)^T$ – L -вектор ошибок из (8) в задании априорных вероятностей (7).

В силу оптимальности БРП $d(\cdot; \pi^o): \nabla_{\pi} R(\pi, \pi^o)|_{\pi=\pi^o} = 0_L$ – нулевой L -вектор ($r_o = R(\pi, \pi^o)|_{\pi=\pi^o}$ – минимум $R(\pi, \pi^o)$ по π). Матрица вторых производных $\nabla_{\pi}^2 R(\pi, \pi^o)$ вычисляется с учетом представления (10) для $R(\pi, \pi^o)$, а также известного свойства обобщенной

δ -функции Дирака [4] $\delta(z) = \frac{d}{dz} U(z)$, $z \in R$:

$$\int_{R^N} g(x) \delta(f(x)) dx = \int_{\{x: f(x)=0\}} g(x) \left| \nabla_x f(x) \right|^{-1} dS_{N-1},$$

где $g(x)$, $f(x)$, $x \in R^N$ – некоторые функции, $\{x: f(x) = 0\} \subset R^{N-1}$ – соответствующая поверхность, и при $g(\cdot) \equiv f(\cdot)$ данный интеграл равен нулю.

С л е д с т в и е. В условиях теоремы при $(0-1)$ -матрице потерь $W = (w_{ij})_{i, j \in S}: w_{ij} = 1 - \delta_{ij}$, РП $d(\cdot; \pi)$ имеет вид:

$$d(x; \pi) = \arg \max_{i \in S} \{\pi_i p_i(x)\}, \quad x \in R^N, \quad (15)$$

а его риск $R(\pi, \pi^o) = P\{d(x; \pi) \neq d^o\}$ – вероятность ошибочной классификации ($\varepsilon_+ \rightarrow 0$):

$$R(\pi, \pi^o) = r_o + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^L \sum_{k=1}^{j-1} (J_{kkkj}(\pi^o) \varepsilon_k^2 + J_{jjkj}(\pi^o) \varepsilon_j^2 - 2J_{kjkj}(\pi^o) \varepsilon_k \varepsilon_j) + O(\varepsilon_+^3), \quad (16)$$

где

$$r_o = 1 - \int_{R^N} \max_{i \in S} \{\pi_i^o p_i(x)\} dx \quad (17)$$

– риск $r_o = R(\pi^o, \pi^o) = P\{d(x; \pi^o) \neq d^o\}$ БРП $d(\cdot; \pi^o)$, а $\{J_{tskj}(\pi^o)\}$ – поверхностные интегралы (13), в которых $f_{kj}(x; \pi^o) = \pi_j^o p_j(x) - \pi_k^o p_k(x)$, $x \in R^N$, $k \neq j \in S$.

Доказательство очевидно и основано на подстановке конкретных значений $w_{ij} = 1 - \delta_{ij}$, $i, j \in S$, элементов матрицы потерь $W = (w_{ij})_{i, j \in S}$ в соотношения (3) и (10) для РП $d(\cdot; \pi)$ и его риска $R(\pi, \pi^o)$, а также в асимптотическое разложение риска (14), поверхностные интегралы (13) и байесовский риск (4).

Из результатов теоремы и следствия к ней видно, что при малых ошибках (8) в задании априорных вероятностей $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_L)^T$ из (7) (малом уровне отклонений (9): $\varepsilon_+ \rightarrow 0$) риск $R(\pi, \pi^o)$ РП $d(\cdot; \pi)$, основанного на БРП (3), отклоняется от оптимального значения $r_o = R(\pi^o, \pi^o)$ на величину $R(\pi, \pi^o) - r_o > 0$ порядка $O(\varepsilon_+^2)$, которая в (14), или (16) для (0–1)-матрицы потерь, вычислена аналитически с точностью до $O(\varepsilon_+^3)$. Что позволяет на практике оценить «проигрыш» по риску при замене в оптимальном БРП $d(\cdot; \pi^o)$ истинных значений $\pi^o = (\pi_1^o, \dots, \pi_L^o)^T$ априорных вероятностей (1) на «искаженные» $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_L)^T$ из (7), (8).

3. Случай двух классов. Модель Фишера. Рассмотрим часто встречающийся на практике случай двух классов [1–3] ($L = 2$, $S = \{1, 2\}$), риск при этом обычно понимается в смысле вероятности ошибочной классификации (используется (0–1)-матрица потерь).

С учетом $L = 2$ априорные вероятности (7), (8):

$$\pi_1 = \pi_1^o + \varepsilon, \quad \pi_2 = \pi_2^o - \varepsilon = 1 - \pi_1^o - \varepsilon, \quad (18)$$

где $\pi_1^o, \pi_2^o = 1 - \pi_1^o$ – истинные значения априорных вероятностей из (1), а $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon$ – ошибка в их задании ($-\pi_1^o < \varepsilon < 1 - \pi_1^o$).

РП $d(\cdot; \pi)$ из (15) может быть записано в виде:

$$d(x; \pi) = U(G(x; \pi)) + 1, \quad x \in R^N, \quad (19)$$

где $G(x; \pi) = f_{12}(x; \pi) = (1 - \pi_1) p_2(x) - \pi_1 p_1(x)$, а для его риска $R(\pi, \pi^o) = P\{d(x; \pi) \neq d^o\}$ из (16) с учетом (13) и того, что

$$\Gamma_{12}(\pi^o) := \tilde{\Gamma}_{12}(\pi^o) = \Gamma(\pi^o) = \{x : G(x; \pi^o) = 0\} = \{x : p_2(x) = H p_1(x)\}, \quad H = \frac{\pi_1^o}{1 - \pi_1^o},$$

получаем ($\varepsilon_+ = |\varepsilon|$):

$$R(\pi, \pi^o) = r_o + \frac{1}{2(1 - \pi_1^o)^2} \int_{\Gamma(\pi^o)} (p_1(x))^2 \left| \nabla_x G(x; \pi^o) \right|^{-1} dS_{N-1} \varepsilon^2 + O(|\varepsilon|^3), \quad (20)$$

где

$$r_o = 1 - \pi_1^o - \int_{R^N} G(x; \pi^o) U(G(x; \pi^o)) dx \quad (21)$$

– байесовский риск $r_o = R(\pi^o, \pi^o)$ из (17).

Наконец, рассмотрим часто встречающуюся в приложениях модель Фишера [1–3], когда условные плотности $\{p_i(\cdot)\}_{i \in S}$ из (2), описывающие классы $\{\Omega_i\}_{i \in S}$, многомерные гауссовские:

$$p_i(x) = n_N(x | \mu_i, \Sigma) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu_i)^T \Sigma^{-1}(x - \mu_i)\right), \quad x \in R^N, i \in S, \quad (22)$$

где $\mu_i = E\{x | d^o = i\} \in R^N$ – N -вектор математического ожидания наблюдений из класса Ω_i (так называемый центр [1–3] i -го класса), а $\Sigma = E\{(x - \mu_i)(x - \mu_i)^T | d^o = i\}$ – общая для всех классов невырожденная ($|\Sigma| \neq 0$) ковариационная $(N \times N)$ -матрица ($i \in S$).

Для модели Фишера (22) в случае двух классов байесовский риск (21) легко вычисляется аналитически [2]:

$$r_o = \pi_1^o \Phi\left(-\frac{\Delta}{2} - \frac{h}{\Delta}\right) + (1 - \pi_1^o) \Phi\left(-\frac{\Delta}{2} + \frac{h}{\Delta}\right), \quad h = \ln(H) = \ln\left(\frac{\pi_1^o}{1 - \pi_1^o}\right), \quad (23)$$

где $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \varphi(w) dw$, $z \in R$ – функция распределения вероятностей стандартного нормального

закона с плотностью $\varphi(w) = n_1(w | 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right)$, $w \in R$, а

$$\Delta = \sqrt{(\mu_1 - \mu_2)^T \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_2)} \quad (24)$$

– межклассовое расстояние Махаланобиса [1–3].

Вычисляя в (20) с учетом плотностей (22) поверхностный интеграл, получаем в условиях модели Фишера следующее соотношение для риска РП (19):

$$R(\pi, \pi^o) = r_o + \frac{\varphi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{h}{\Delta}\right)}{2\pi_1^o (1 - \pi_1^o)^2 \Delta} \varepsilon^2 + O(|\varepsilon|^3). \quad (25)$$

Из (23), (25) видно, что точность классификации повышается с ростом межклассового расстояния Δ из (24) и уменьшением уровня отклонений априорных вероятностей $\varepsilon_+ = |\varepsilon|$.

Выражение для риска (25) позволяет на практике по заданному $\delta > 0$ определить так называемый δ -допустимый уровень отклонений [3]:

$$\varepsilon_+^* = \varepsilon_+^*(\delta) = (1 - \pi_1^o) \sqrt{\frac{2\pi_1^o \Delta \delta}{\varphi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{h}{\Delta}\right)}},$$

гарантирующий, что при уровне отклонений, не превышающем ε_+^* : $\varepsilon_+ = |\varepsilon| \leq \varepsilon_+^*$, приращение риска $R(\pi, \pi^o)$ относительно оптимального значения r_o не превзойдет δ : $R(\pi, \pi^o) - r_o \leq \delta$.

Литература

1. Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. М., 1989.
2. Харин Ю. С., Жук Е. Е. Математическая и прикладная статистика. Минск, 2005.
3. Жук Е. Е., Харин Ю. С. Устойчивость в кластер-анализе многомерных наблюдений. Минск, 1998.
4. Гельфанд И. М., Шолов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., 1959.

E. E. ZHUK

THE BAYES DECISION RULE STABILITY UNDER INACCURATELY DETERMINED *A PRIORI* PROBABILITIES OF CLASSES

Summary

The Bayes decision rule stability is investigated under inaccurately determined class *a priori* probabilities of classes. The risk bias is analytically evaluated by the risk asymptotic expansion method. The obtained results are illustrated for the well-known Fisher model.

УДК 519.2:005

А. В. ОВСЯННИКОВ

ИНТЕРВАЛЬНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ ЯДЕРНЫХ ОЦЕНОК ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

(Поступила в редакцию 18.05.2010)

Введение. Исследованию временных рядов посвящено обширное количество публикаций. Основы современной теории прогнозирования заложены независимо А. Н. Колмогоровым (1941) и Н. Винером (1942, 1949). В дальнейшем теория получила развитие в трудах А. М. Яглома (1953), Т. Андерсона (1959), Э. Парзена (1961), Р. Брауна (1962) и др. Последующие работы в области прогнозирования связаны с исследованиями в рамках отдельных приложений теории управления, статистической радиотехники, а также при оценке надежности технических систем, в финансово-экономической сфере и т. д.

Важнейшим вопросом теории прогнозирования является не только построение собственно самого прогноза, но и оценка его качества, которое определяется априорными сведениями о параметрической модели тренда и «шумах» наблюдаемого процесса. Большой класс моделей процессов с дробно-рациональной спектральной плотностью, используемых в задачах прогноза, подробно изучен в работах Дж. Бокса, Г. Дженкинса, Т. Андерсона, М. Кендэла и др. Достаточно хорошо разработаны методы и алгоритмы точечного и интервального оценивания, точечного прогнозирования для случая стационарных случайных процессов (ССП) «шумов» наблюдения с известным законом распределения.

В то же время во многих практических задачах реальные временные ряды оказываются нестационарными. В этом случае применение математического аппарата прогнозирования приближениями ССП (УССП) возможно лишь на очень коротких отрезках «стационарности» T_0 [1], что в целом снижает качество такого прогноза. В этой связи интервальный прогноз нестационарных случайных процессов (НСП) оказывается эффективнее чем УССП, в том смысле, что гарантирует прогноз в заданном доверительном интервале на больших отрезках времени $T_n > T_0$.

Цель статьи – разработать общий подход к интервальному прогнозированию НСП, обеспечивающий построение теоретически обоснованного, устойчивого к динамике «шума» прогноза.

Постановка задачи интервального прогноза НСП. Будем рассматривать задачу прогнозирования на p шагов в условиях регулярного статистического эксперимента. Пусть имеется однородная независимая выборка $Y = [y_1 \dots y_k]^T$, принадлежащая нестационарной плотности (НП) $P_X = P(Y | X, t)$, где X – набор параметров НП. В общем случае $y_i = f_i + v_i$, $i = \overline{1, k}$. В этой модели наблюдаемый ряд рассматривается как сумма детерминированной $\{f_i\}$ и случайной нестационарной последовательности $\{v_i\}$ – «шума» наблюдения. При фиксированном объеме выборки Y выборочным пространством является k -мерное пространство R^k , на котором задана плотность P_X , $u \in Y$ (здесь и далее под плотностью понимается плотность распределения вероятностей). Верхний α_p^+ и нижний α_p^- доверительный предел для момента времени $t_p > t_k$ определяются выражениями (из условия $P(\alpha_p^- - f_p < u \leq \alpha_p^+ - f_p) = \gamma$, $u = y - f_p$, γ – заданная

доверительная вероятность) $\alpha_p^+ = f_p + F_p^{-1}[F_p(0) + \gamma/2]$, $\alpha_p^- = f_p - F_p^{-1}[F_p(0) - \gamma/2]$, которые при симметричной НП преобразуются к виду

$$\alpha_p^\pm = f_p \pm F_p^{-1}[\gamma/2], \quad (1)$$

где F_p^{-1} – функция, обратная функции распределения $F_p(\alpha_p^\pm - f_p) = \gamma/2$. Ширина интервала прогноза $\Delta\alpha_p = 2F_p^{-1}[\gamma/2]$. Таким образом, если известна НП, определяющая однозначное интегральное преобразование F_p^{-1} , решение задачи прогнозирования сводится к вычислению (1) в моменты времени $t_p > t_k$.

Ядерные оценки НП. Одним из возможных подходов к определению плотности на R^k является использование ядерных оценок [2]. Для НП можно использовать непараметрическую ядерную оценку следующего вида:

$$P_k(y) = \sum_{i=1}^k (KC_k)^{-1} G[y, X_i], \quad (2)$$

где $G(y, X_i) = G(y - f_i, \sigma_i)$, $[\Lambda, \sigma] \in X$, $f_i = f(\Lambda_i)$ – функция тренда, $\Lambda_i = \Lambda(t_i)$ – вектор параметров тренда, $\sigma_i = \sigma(t_i)$ – параметр масштаба, $C_k = C(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ – параметр сглаживания – последовательность положительных чисел ($\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} kC_k = \infty$) и G – неотрицательная борелевская функция (ядро) на R^k в пространстве $L_1: J_k = \int |P_k - P| dy$, удовлетворяющая условиям $G \geq 0$, $\int G dy = 1$.

С вычислительной точки зрения при $k \gg 1$ использование (2) неудобно, поэтому можно предложить модификацию дискретной оценки (2) в виде

$$P_k(y) = C_k^{-1} \exp\left(-\sum_{i=1}^k B(v_i, \sigma_i)\right), \quad (3)$$

где $v_i = y - f_i$, $B(v_i, \sigma_i)$ – семейство двухпараметрических функций. Так, например, для дискретного эквивалента непрерывного функционала гауссовского случайного процесса с равномерной спектральной плотностью оценка (3) принимает известный вид

$$P_k(y) = (2\pi\sigma^2)^{-k/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k [(y - f_i) / \sigma]^2\right). \quad (4)$$

Заметим, что если выбрать $B(v_i, \sigma_i) = -\ln P(v_i, \sigma_i)$, то связь между выражениями (2), (3) и выборочным эмпирическим функционалом (ВЭФ) [3] определяется зависимостью $W_k(y) = \sum_{i=1}^k (kC_k)^{-1} B(v_i, \sigma_i)$. В этом случае функция $B(v_i, \sigma_i)$ представляет собой частную функцию потерь (ФП), выбор которой определяет обратное преобразование F^{-1} в (1) и качество точечных оценок параметров плотности X_i^* .

Последовательные алгоритмы идентификации НП и параметров. При последовательном накоплении априорной информации можно воспользоваться рекуррентными оценками плотности. Так, например, для ВЭФ $W_k(y)$, если положить $C_k = \sigma_k$, получим алгоритм экспоненциального сглаживания

$$W_k = W_{k-1} + \eta_k ((\sigma_k)^{-1} B_k - W_{k-1}), \quad (5)$$

где $B_k = B[(v_k, \sigma_k)]$, $\eta_1 = 1$, $0 < \eta_k \leq 1$, $\eta_k \rightarrow 0$ и $\sum_{i=1}^k \eta_i = \infty$ при $k \rightarrow \infty$. В случае $\eta_k = 1/k$ отношение (5) определяет оценку ВЭФ $W_k(y)$, приведенную выше. Для обобщенной ФП $\mathbf{B}_k = -\ln P_k(y)$ из (3) получим последовательную оценку:

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{B}_{k-1} + B_k - \ln(C_{k-1} / C_k). \quad (6)$$

Целесообразность выбора того или иного метода оценки вектора параметров плотности $X_k^* = [\Lambda_k^*, \sigma_k^*]^T$ определяется конкретной постановкой задачи и объемом априорной информации [3]. Например, применение стохастической градиентной процедуры к дискретному функционалу (3) приводит к оценкам в виде уравнения

$$X_{k+1}^* = X_k^* - \left(\nabla_X \ln(\nabla_X \mathbf{B}_k) \Big|_{X=X_k^*} \right)^{-1}, \quad (7)$$

где $\nabla_X = \partial / \partial X$. В уравнении (7) производная обобщенной функции потерь по параметру имеет вид

$$\nabla_{\Lambda} \mathbf{B}_k = \partial \mathbf{B}_k / \partial \Lambda_k, \quad \nabla_{\sigma} \mathbf{B}_k = \partial \mathbf{B}_k / \partial \sigma_k + \partial \ln C_k / \partial \sigma_k. \quad (8)$$

Уравнения (6)–(8) образуют замкнутую систему уравнений идентификации плотности и оценки ее параметров. Конкретизация уравнений обеспечивается выбором вида функций тренда f и масштаба σ исходя из практических целей задачи прогнозирования.

Оценки плотности (3) для модульной и квадратичной ФП приведены в табл. 1. Приведены также уравнения оценки коэффициентов тренда $\Lambda = [\lambda_1 \dots \lambda_l]^T$ и масштаба \mathbf{D} (строка 2); последовательные алгоритмы оценок Λ и \mathbf{D} вида (7) (строка 3). В табл. 1 обозначено: $F = [f_1 \dots f_k]^T$ – вектор-строка, \mathbf{K}_k – матрица коэффициентов усиления (алгоритм для модульной ФП приведен для случая высокой апостериорной точности), $f_k^* = f_k(\Lambda_{k-1}^*)$, $\nabla F = \partial F / \partial \Lambda$, $\mathbf{D} = \text{diag}[D_1 \dots D_k]$, Erf^{-1} – функция, обратная интегралу вероятности. Наиболее простой вид алгоритм оценки принимает в случае $D_i = \sigma_i^2 = D t_i$. В случае $\eta_k = 1/k$ оценки D_k^* строки 3 и 4 эквивалентны. Операцию $\sqrt{\quad}$ в табл. 1 следует понимать как поэлементную.

Таблица 1

1	Функция потерь \mathbf{B}	$\frac{1}{2}(Y - F)^T \mathbf{D}^{-1}(Y - F)$	$\sqrt{2(Y - F)^T \mathbf{D}^{-1}(Y - F)}$
2	Уравнения оценок Λ , \mathbf{D} в точках Λ^* , \mathbf{D}^*	$(\nabla F)^T \mathbf{D}^{-1}(Y - F) = 0$ $(Y - F)^T \mathbf{D}^{-2}(Y - F) - \text{tr}(\mathbf{D}^{-1}) = 0$	$(\nabla F)^T \sqrt{\mathbf{D}^{-1}} \text{sign}(Y - F) = 0$ $\sqrt{2(Y - F)^T \mathbf{D}^{-2}(Y - F)} - \text{tr}(\sqrt{\mathbf{D}^{-1}}) = 0$
3	Последовательные оценки	$\Lambda_k^* = \Lambda_{k-1}^* + \mathbf{K}_k (\nabla f_k^*)^T (y_k - f_k^*) / D_k^*$ $\mathbf{K}_k^{-1} = \mathbf{K}_{k-1}^{-1} + f_k^{*T} f_k^* / D_k^*$ $D_k^* = D_{k-1}^* + \eta_k \left[\frac{(y_k - f_k^*)^2}{t_k} - D_{k-1}^* \right]$	$\Lambda_k^* = \Lambda_{k-1}^* + \mathbf{K}_k (\nabla f_k^*)^T \text{sign}(y_k - f_k^*) / D_k^*$ $\mathbf{K}_k^{-1} = \mathbf{K}_{k-1}^{-1} + f_k^{*T} f_k^* / D_k^*$ $D_k^* = D_{k-1}^* + \eta_k \left[\frac{\sqrt{2} y_k - f_k^* }{t_k} - D_{k-1}^* \right]$
4	Оценка D на $i = \overline{1, k}$	$D_k^* = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{(y_i - f_i)^2}{t_i}$	$D_k^* = \frac{\sqrt{2}}{k} \sum_{i=1}^k \frac{ y_i - f_i }{t_i}$
5	α_k^{\pm}	$f(\Lambda_k^*) \pm \sqrt{2D_k^*} \text{Erf}^{-1}(\gamma)$	$f(\Lambda_k^*) \mp D_k^* \ln(1 - \gamma) / \sqrt{2}$

Интервальное прогнозирование НСП. В условиях L_1 -подхода функционал $J_k = \int |P_k - P| dy \rightarrow 0$ по вероятности при $k \rightarrow \infty$ [2] и, следовательно, $f_k^* \rightarrow f(t, \Lambda)$ и $D_k^* \rightarrow D(t)$. Тогда (1) можно представить в виде $\alpha(t)^\pm = f(t, \Lambda) \pm \Delta f(t, D, \gamma)$, где величина $\Delta f(t)$ определяется обратным преобразованием функции распределения $F^{-1}(1)$.

Алгоритмы оценки отклонения $\pm \Delta f(t)$ для симметричных относительно тренда $f(t)$ НП приведены в табл. 2. НП № 1 описывает диффузионный процесс с дисперсией $Nt/2$ (N – односторонняя спектральная плотность белого шума), № 2 – НСП с гауссовской формой плотности в каждом временном сечении t_i , № 3 и № 4 – НСП с переменной интенсивностью и амплитудой мощных импульсных выбросов. Для приведения алгоритмов интервального прогнозирования к сопоставимому виду дисперсии НСП в табл. 2 определены через величину $D(t) = Nt$. Обозначено: $v(t) = y(t) - f(t)$, $x = (\text{Erf}^{-1}(\gamma) - 1) / e$, $\Psi(x)$ – функция, решение которой w дает $x = we^w$.

Таблица 2

	Вид НП	Алгоритм оценки отклонения $\Delta f(t)$	Дисперсия НП $D(t)$
1	$(\pi D(t))^{-1/2} \exp[-v^2(t) / D(t)]$	$\pm \sqrt{D(t)} \text{Erf}^{-1}(\gamma)$	$D(t)/2$
2	$(2\pi D(t))^{-1/2} \exp[-v^2(t) / 2D(t)]$	$\pm \sqrt{2D(t)} \text{Erf}^{-1}(\gamma)$	$D(t)$
3	$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{D(t)} \exp(-\sqrt{2} v(t) / D(t))$	$\mp \frac{D(t)}{\sqrt{2}} \ln(1 - \gamma)$	$D^2(t)$
4	$\sqrt{\frac{15}{2}} \frac{1}{D^2(t)} \exp\left(-\frac{\sqrt[4]{120}}{D(t)} \sqrt{ v(t) }\right)$	$\pm \frac{D^2(t)}{\sqrt{120}} (1 + \Psi(x))^2$	$D^4(t)$

Анализ алгоритмов оценки отклонения $\Delta f(t)$ показывает, что увеличение размаха интервального прогноза определяется видом НП и с точностью до постоянного множителя пропорционально глубине прогноза $t^{1/m}$.

Представленные в табл. 2 НП являются частными случаями плотности обобщенно-диффузионного процесса:

$$P(t, v) = \frac{1}{2\sqrt{D(t)}\Gamma(1 + 1/m)} \left(\frac{\Gamma(3/m)}{\Gamma(1/m)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(- \left(\frac{\Gamma(3/m)}{\Gamma(1/m)} \right)^{\frac{m}{2}} (|v(t)| / \sqrt{D(t)})^m \right) \quad (9)$$

с параметрами $m = 0,5$ (НП № 4), $m = 1$ (НП № 3), $m = 2$ (НП № 2).

Плотность (9) позволяет определить стохастические дифференциальные уравнения (СДУ), описывающие процесс $v(t)$. Так, в случае постоянного коэффициента диффузии $b = \text{const}$ из уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова $\partial P / \partial t = -\partial(aP) / \partial y + 0,5\partial^2(bP) / \partial y^2$, где $P = P(t, y)$, можно получить уравнение относительно коэффициента сноса $a(t, y)$ с граничным условием $a(t, y = 0) = a(t)$ [4]

$$a'_y - az_y - \frac{1}{2}b(z_y^2 - z'_y) - z_t = 0, \quad (10)$$

где обозначено $a'_y = \partial a(t, y) / \partial y$, $z_y = -\partial \ln P(t, y) / \partial y$, $z_t = -\partial \ln P(t, y) / \partial t$.

Решение уравнения (10) позволяет определить СДУ в виде

$$\frac{dy(t)}{dt} = a(t, y) + gn(t), \quad g = \sqrt{2b/N}, \quad (11)$$

где $n(t)$ – нормальный белый шум с нулевым средним и дельтаобразной корреляционной функцией $N\delta/2$.

Приведем примеры СДУ для некоторых НП из табл. 2. Для НП № 1 с граничным условием $a(t) = f'_i(t) + \frac{f(t)(2b-N)}{2D(t)}$ получим $\frac{dy(t)}{dt} = \frac{(N-2b)(y(t)-f(t))}{2D(t)} + f'_i(t) + \sqrt{\frac{2b}{N}}n(t)$ и при $b = N/2$ окончательно

$$\frac{dy(t)}{dt} = f'_i(t) + n(t). \quad (12)$$

После перехода к переменной v из (12) следует уравнение чисто диффузионного процесса $\frac{dv(t)}{dt} = n(t)$. Заметим, что в условиях $f(t) = -\lambda_0 - \lambda_1 t$ и $t > 0$ решение (12) в виде НП совпадает с известным [5].

Для НП № 2 из табл. 2 с граничным условием $a(t) = f'_i(t) + \frac{f(t)(b-N)}{2D(t)}$ получим $\frac{dy(t)}{dt} = \frac{(N-b)(y(t)-f(t))}{2D(t)} + f'_i(t) + \sqrt{\frac{2b}{N}}n(t)$ и при $b = N/2$ окончательно

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{y(t)-f(t)}{4t} + f'_i(t) + n(t). \quad (13)$$

После перехода к переменной v из (13) следует СДУ $\frac{dv(t)}{dt} = \frac{v(t)}{4t} + n(t)$.

Для НП № 3 из таблицы со сложным граничным условием $a(t) = f'_i(t) - \frac{b \operatorname{sign}(y(t)-f(t)) + \sqrt{2N}f(t)}{\sqrt{2D(t)}}$ получим $\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\sqrt{2N}(y(t)-f(t)) - b \operatorname{sign}(y(t)-f(t))}{\sqrt{2D(t)}} + f'_i(t) + \sqrt{\frac{2b}{N}}n(t)$ и при $b = N/2$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{y(t)-f(t)}{t} - \frac{\operatorname{sign}(y(t)-f(t))}{\sqrt{8t}} + f'_i(t) + n(t). \quad (14)$$

После перехода к переменной v из (14) следует СДУ $\frac{dv(t)}{dt} = \frac{v(t)}{t} - \frac{\operatorname{sign}(v(t))}{\sqrt{8t}} + n(t)$.

Как видно из (12)–(14), при $t \rightarrow \infty$ СДУ НСП с плотностью (9) сходятся к чисто диффузионному процессу. Это означает, что возможность прогнозируемости таких НСП убывает пропорционально величине $1/t$, т. е. вклад детерминированной составляющей тренда $f(t)$ в наблюдаемый процесс $y(t)$ уменьшается как $1/t$. Подробное исследование и анализ приведенных уравнений представляет самостоятельный интерес и выходит за рамки статьи.

Робастный интервальный прогноз. Предположим, выполняются следующие условия: а) НП

$P(t, y)$ регулярна $\forall t_i, i = \overline{1, k}$; б) для каждого сечения t_i НСП выполняется $P(t_i, y) \in \mathfrak{R}$, где \mathfrak{R} – некоторый класс плотностей, подчиняющихся заданным граничным условиям. Тогда в условиях

а) локальная робастность обеспечивается нахождением такой плотности P^* («наихудшая»

в классе \mathfrak{R}), для которой справедливо неравенство $D[B_i^*, P^*] \geq D[B_i^*, P]$. В условиях б) последнее неравенство становится справедливым для всех сечений t_i НСП, что гарантирует $D[\mathbf{B}^*, P^*] \geq D[\mathbf{B}^*, P]$ и, следовательно, возможно построение робастных ядерных оценок НП вида (3).

Используя методику [3], можно найти «наихудшую» в классе \mathfrak{R} плотность P^* и соответственно определить вид ФП B^* , с учетом которой строится интервальный прогноз. Так, например, для класса всех невырожденных плотностей, когда известно только то, что она существует $\mathfrak{R}_1 = \{P: P(t_i, 0) \geq \varepsilon > 0\}$, «наихудшая» плотность имеет форму двойного экспоненциального распределения с модульной ФП. Задание класса плотностей с ограниченной дисперсией в сечении $\mathfrak{R}_2 = \{P: \int y^2 P(t_i, y) dy \leq \sigma_i^2\}$ приводит к квадратичной ФП («наихудшая» в классе гауссовская форма плотности). Таким образом, приведенные в табл. 1 алгоритмы идентификации НП и ее параметров являются робастными и прогноз на их основе – робастным.

Моделирование алгоритмов интервального прогноза. Рассмотрим применение алгоритмов интервального прогноза для реальных временных рядов динамики индексных показателей и процесса заданного СДУ. При построении прогноза ограничимся линейной моделью тренда $f(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t$. Предположим, «шум» наблюдения $v(t)$ имеет НП № 1 (табл. 2) – «наихудшую» в классе \mathfrak{R}_2 . Такая модель соответствует наблюдаемому НСП (12).

Для прогноза использовались ряды: P1 – индекс ММВБ (данные с 1.09.1997 по 26.03.2010; <http://www.micex.ru>), P2 – индекс РТС (данные с 22.09.1995 по 26.03.2010; <http://www.rts.ru>), P3 – типичный НСП (12) с параметрами $\lambda_0 = 30$ и $\lambda_1 = 0,01$ (параметры моделирования: $D_n = 1$, $\Delta t = 0,01$). Сравним результаты, полученные на основе алгоритма с квадратичной ФП (табл. 1, столбец 3; обозначим алгоритм **A1**), и стандартным алгоритмом (**A2**) [1], при котором отклонение интервально-

го прогноза $\Delta f_p = \pm t_\gamma \sqrt{S_y^2 + S_{\lambda_0}^2 + S_{\lambda_1, p}^2}$, где S_y – стандартная ошибка модели, S_{λ_0} и $S_{\lambda_1, p}$ – ошибки положения тренда по данным $i = \overline{1, k}$. Исходный временной ряд длиной M разбивался на две части, по первой (длиной k) проводилась оценка параметров модели и строился прогноз глубиной $p = M - k$. Качество алгоритмов интервального прогноза оценивалось по второй части исходного ряда (длиной p) относительным коэффициентом эффективности $\delta_p = (N_{1p} - N_{2p}) / N_{2p}$, где N_{ip} – число значений временного ряда, попавших в коридор $\pm \Delta f_p$, определенный для алгоритмов **A1** и **A2**. В табл. 3 представлены значения коэффициента δ_p для рядов P1, P2 и P3 при $\gamma = 0,9$.

Таблица 3

Глубина прогноза p	Ряд P1 $M = 3114$	Ряд P2 $M = 3630$	Ряд P3 $M = 6000$
$5M/6$	1,92	1,84	0,81
$2M/3$	1,64	1,19	0,89
$M/2$	1,91	3,38	7,19
$M/3$	1,74	0,34	15,14
$M/6$	1,73	1,28	7,44

На рис. 1 представлен ряд P1 (с точкой $p = M/3$), на рис. 2 – ряд P3 (с точкой $p = M/2$). Отсчет прогноза велся от точки в которой алгоритм **A2** дает минимальный интервальный прогноз $\pm t_\gamma S_y \sqrt{1 + 1/k}$ для средней точки $t_{cp} = t_{k/2}$.

Анализ результатов моделирования показывает: во-первых, алгоритм **A1** эффективнее **A2** во всех рассмотренных случаях, поскольку $\delta_p > 0$ и в среднем эффективность превышает 100%; во-вторых, указанный эффект достигается за счет настройки параметра масштаба D_k^* с учетом интенсивности «шума»; в-третьих, как видно из представленных рисунков алгоритм **A2**, в отличие от **A1**, оказывается практически нечувствительным к динамике «шума»; в-четвертых,

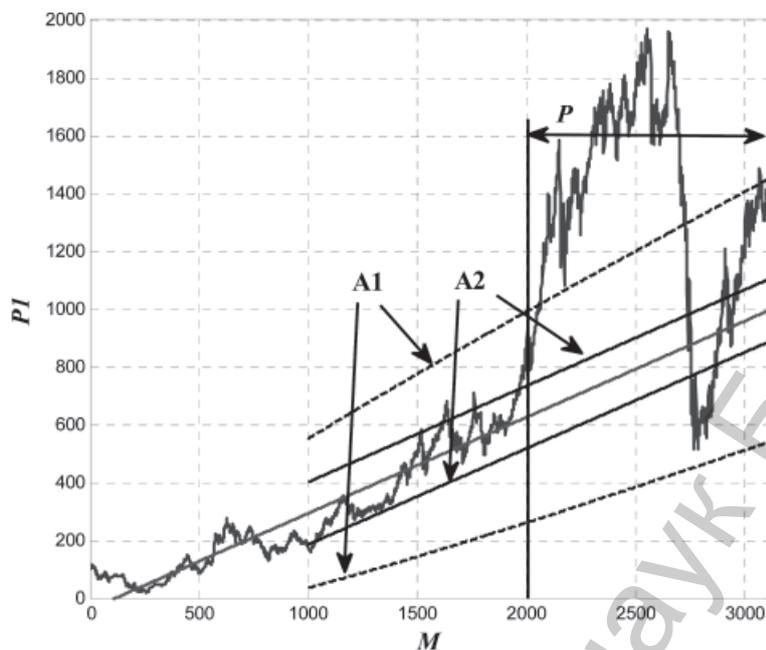


Рис. 1

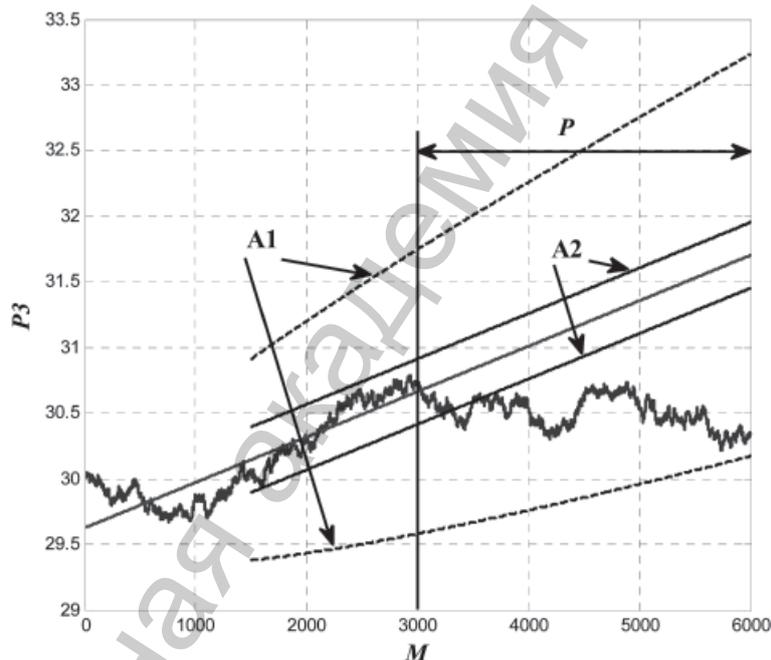


Рис. 2

интервальный прогноз по алгоритму **A1** хоть и является более пессимистическим, но вместе с тем дает гарантированно обоснованный результат на большем временном отрезке t_p чем алгоритм **A2**.

Заключение. Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. Интервальный прогноз, построенный на основе ядерных оценок НП вида (3), оказывается эффективным инструментом прогнозирования НСП, особенно в долгосрочной перспективе. В этой связи целесообразно рассматривать применение интервального прогноза НСП в сочетании с краткосрочным, построенным по классической методике приближениями ССП.

2. Интервальный прогноз НСП позволяет «ослабить» условие на точность оценки $f^*(t)$ (что важно при построении прогноза процессов не являющихся в строгом смысле эргодическими),

поскольку нестационарность $y(t)$ обусловлена не только нелинейной функцией тренда $f(t)$, но и «шумом» наблюдения $v(t)$.

3. Прогнозируемость обобщенно-диффузионного процесса $y(t)$ с НП (9) (или процессов сводимых к нему), убывает как $1/t$, т. е. обратно пропорционально глубине прогноза. При этом качество прогноза, как следует из таблицы 2, с точностью до постоянного множителя уменьшается пропорционально росту $t^{1/m}$.

4. Рассмотренная методика построения интервального прогноза НСП допускает применение робастных и адаптивных методов идентификации НП и ее параметров (5)-(7).

5. Результаты моделирования алгоритмов прогноза реальных временных рядов подтверждают эффективность интервального прогноза на основе ядерных оценок НП.

Литература

1. Лукашин Ю. П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. М., 2003.
2. Деврой Л., Дьёрфи Л. Непараметрическое оценивание плотности. L_1 -подход / Пер. с англ. М., 1988.
3. Фомин В. Н. Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М., 1984.
4. Овсянников А. В. // Труды БГТУ. Сер. физ.-мат. наук и информ. Вып. XII. 2004. С. 106–109.
5. Тихонов В. И., Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М., 1975.

A. V. OVSIANNICOV

INTERVAL PREDICTION OF NON-STATIONARY STOCHASTIC PROCESSES ON THE BASIS OF NUCLEAR ESTIMATES OF PROBABILITY DENSITY

Summary

The article deals with an interval prediction of unsteady stochastic processes on the basis of nuclear estimates of probability density. It is shown that such an approach provides construction of theoretically well-founded «noise» of the forecast steady against dynamics. Consecutive algorithms of identification of density and its parameters are presented. Forecasting a generalized diffusion process is studied. The possibility of constructing a robust interval forecast is shown.

УДК 519.65

А. П. ХУДЯКОВ

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ТИПА ЭРМИТА–БИРКГОФА ОТНОСИТЕЛЬНО ОТДЕЛЬНЫХ ЧЕБЫШЕВСКИХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 12.03.2010)

Введение. Интерполяционная задача Эрмита–Биркгофа для случая функций состоит в построении многочленов, для которых выполнялись бы условия совпадения значений многочлена и его производных некоторых фиксированных порядков во всех или отдельных узлах с соответствующими значениями интерполируемой функции и ее производных. Эта задача с пропусками порядков производных в отличие от задачи эрмитова типа не всегда разрешима [1–3].

В более общей постановке интерполяционной задачи Эрмита–Биркгофа условия совпадения в отдельных узлах производных заменяются на условия совпадения заданного дифференциального или некоторого другого вида оператора. В случае алгебраических многочленов интерполяционные формулы такого типа получены в [4–5].

В данной работе рассматривается обобщенная интерполяционная задача Эрмита–Биркгофа. Построены новые интерполяционные тригонометрические многочлены, многочлены относительно двух видов рациональных функций, а также интерполяционные многочлены относительно экспоненциальной системы функций для специальных видов линейных дифференциальных операторов.

Тригонометрическое интерполирование. Пусть имеется совокупность узлов $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{2n-1} < t_{2n} < 2\pi$. В этих узлах заданы значения $f(t_i)$ функции $f(t)$. Кроме этого, в одном из узлов t_j известно значение оператора $L_{2n+1}(f; t_j) \equiv L_{2n+1}f(t_j)$, где L_{2n+1} – дифференциальный оператор вида

$$L_{2n+1}f(t) = D(D^2 + 1^2) \dots (D^2 + n^2)f(t), \quad D = \frac{d}{dt}. \quad (1)$$

Задача состоит в построении тригонометрического полинома $T_{n+1}(t)$ степени не выше $n+1$, для которого выполнялись бы условия

$$T_{n+1}(t_i) = f(t_i) \quad (i = \overline{0, 2n}); \quad L_{2n+1}(T_{n+1}; t_j) = L_{2n+1}(f; t_j). \quad (2)$$

Теорема 1. *Тригонометрический многочлен*

$$T_{n+1}(t) = H_n(t) + \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} \frac{\Omega_{n+1}(t)}{\cos \frac{1}{2} \left((2n+2)t_j - t_0 - \sum_{k=0}^{2n} t_k \right)} L_{2n+1}(f; t_j), \quad (3)$$

$$\text{где } H_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} \frac{l_n(t)}{\sin \frac{1}{2}(t-t_k) l'_n(t_k)} f(t_k), \quad l_n(t) = \sin \frac{1}{2}(t-t_0) \sin \frac{1}{2}(t-t_1) \dots \sin \frac{1}{2}(t-t_{2n}),$$

$\Omega_{n+1}(t) = \sin(t-t_0) \prod_{k=1}^{2n} \sin \frac{1}{2}(t-t_k)$, $\cos \left((n+1)t_j - t_0 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} t_k \right) \neq 0$, степени не выше $n+1$ удовлетворяет условиям (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $H_n(t_i) = f(t_i)$ ($i = \overline{0, 2n}$). Так как в произведение $\Omega_{n+1}(t)$ входит множитель $\sin c(t-t_i)$, где $c=1$ либо $c=1/2$, то $\Omega_{n+1}(t_i) = 0$ ($i = \overline{0, 2n}$). Таким образом, первая группа условий (2) выполняется.

Поскольку

$$L_{2n+1}(\cos kt) = L_{2n+1}(\sin kt) = 0 \quad (k = \overline{0, n}), \quad (4)$$

то в силу линейности оператора L_{2n+1} будем иметь $L_{2n+1}(H_n(t)) = 0$.

Преобразуем далее произведение $\Omega_{n+1}(t)$. Так как

$$\prod_{k=1}^{2n} \sin \frac{1}{2}(t-t_k) = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \cos \frac{1}{2} \left(2nt - \sum_{i=1}^{2n} t_i \right) + \tilde{T}_{n-1}(t),$$

где $\tilde{T}_{n-1}(t) = a_{n0} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{nk} \cos kt + b_{nk} \sin kt)$ – некоторый тригонометрический многочлен степени не выше $n-1$, то получим, что

$$\begin{aligned} \Omega_{n+1}(t) = & \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \left(-\sin \frac{1}{2} \left(t_0 + \sum_{i=0}^{2n} t_i \right) \cos(n+1)t + \cos \frac{1}{2} \left(t_0 + \sum_{i=0}^{2n} t_i \right) \sin(n+1)t \right) + \\ & \tilde{a}_{n0} + \sum_{k=1}^n (\tilde{a}_{nk} \cos kt + \tilde{b}_{nk} \sin kt). \end{aligned}$$

Так как $L_{2n+1} \left(\tilde{a}_{n0} + \sum_{k=1}^n (\tilde{a}_{nk} \cos kt + \tilde{b}_{nk} \sin kt) \right) = 0$, а $(D^2 + k^2) \cos(n+1)t = -[(n+1)^2 - k^2] \cos(n+1)t$, то будем иметь

$$\begin{aligned} L_{2n+1}(\cos(n+1)t) &= D(D^2 + 1)(D^2 + 2^2) \cdots (D^2 + n^2) \cos(n+1)t = \\ & D \left(\frac{(-1)^n n! (2n+1)!}{(n+1)!} \cos(n+1)t \right) = (-1)^{n+1} (2n+1)! \sin(n+1)t. \end{aligned}$$

Аналогично показываем, что

$$\begin{aligned} (D^2 + k^2) \sin(n+1)t &= -[(n+1)^2 - k^2] \sin(n+1)t; \\ L_{2n+1}(\sin(n+1)t) &= (-1)^n (2n+1)! \cos(n+1)t. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} L_{2n+1}(\Omega_{n+1}(t)) &= \frac{(2n+1)!}{2^{2n}} \left(\sin \frac{1}{2} \left(t_0 + \sum_{i=0}^{2n} t_i \right) \sin(n+1)t + \right. \\ & \left. \cos \frac{1}{2} \left(t_0 + \sum_{i=0}^{2n} t_i \right) \cos(n+1)t \right) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n}} \cos \frac{1}{2} \left((2n+2)t - t_0 - \sum_{i=0}^{2n} t_i \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Окончательно, при подстановке узла t_j вместо t в формулу (5) с учетом предыдущих выводов получим, что вторая группа равенств (2) справедлива. Что и требовалось доказать.

Приведем тригонометрический полином (3) для $n = 1, 2$.

1. Пусть в узлах $0 = t_0 < t_1 < t_2 < 2\pi$ заданы значения $f(t_i)$ функции $f(t)$. Кроме этого, в одном из узлов t_j известно значение оператора $L_3(f; t_j)$, где оператор $L_3 f(t) = D(D^2 + 1)f(t) = f'''(t) + f'(t)$.

Тригонометрическим полиномом $T_2(t)$ второй степени, для которого выполнялись бы условия $T_2(t_i) = f(t_i)$ ($i = 0, 1, 2$); $L_3(T_2; t_j) = L_3(f; t_j)$, будет

$$T_2(t) = H_1(t) + \frac{2\Omega_2(t)}{3\cos\frac{1}{2}(4t_j - 2t_0 - t_1 - t_2)} L_3(f; t_j),$$

где

$$H_1(t) = \frac{\sin\frac{1}{2}(t-t_1)\sin\frac{1}{2}(t-t_2)}{\sin\frac{1}{2}(t_0-t_1)\sin\frac{1}{2}(t_0-t_2)} f(t_0) + \frac{\sin\frac{1}{2}(t-t_0)\sin\frac{1}{2}(t-t_2)}{\sin\frac{1}{2}(t_1-t_0)\sin\frac{1}{2}(t_1-t_2)} f(t_1) +$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(t-t_0)\sin\frac{1}{2}(t-t_1)}{\sin\frac{1}{2}(t_2-t_0)\sin\frac{1}{2}(t_2-t_1)} f(t_2), \quad \Omega_2(t) = \sin(t-t_0)\sin\frac{1}{2}(t-t_1)\sin\frac{1}{2}(t-t_2).$$

2. Пусть в узлах $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < 2\pi$ заданы значения $f(t_i)$ функции $f(t)$. Кроме этого, в одном из узлов t_j известно значение оператора $L_5(f; t_j)$, где оператор L_5 имеет вид

$$L_5 f(t) = D(D^2 + 1)(D^2 + 4)f(t) = f^{(V)}(t) + 5f'''(t) + 4f'(t).$$

Полиномом $T_3(t)$ третьей степени, для которого выполнялись бы условия $T_3(t_i) = f(t_i)$ ($i = \overline{0, 3}$); $L_5(T_3; t_j) = L_5(f; t_j)$, является

$$T_3(t) = H_2(t) + \frac{2\Omega_3(t)}{15\cos\frac{1}{2}\left(6t_j - t_0 - \sum_{k=0}^4 t_k\right)} L_5(f; t_j),$$

где $H_2(t) = \sum_{k=0}^4 \frac{l_2(t)}{2\sin\frac{1}{2}(t-t_k)l_2'(t_k)} f(t_k)$, $l_2(t) = \prod_{k=0}^4 \sin\frac{1}{2}(t-t_k)$, $\Omega_3(t) = \sin(t-t_0) \prod_{k=1}^4 \sin\frac{1}{2}(t-t_k)$.

Интерполирование по системе рациональных функций. Пусть в узлах $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ заданы значения $f(t_i)$ функции $f(t)$. Кроме этого, в одном из узлов t_j известно значение оператора $\hat{L}_{n+1}(f; t_j)$, где \hat{L}_n является дифференциальным оператором вида

$$\hat{L}_n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} [q_{n-1}(t)f(t)], \quad q_n(t) = (t+c_0)(t+c_1)\dots(t+c_n).$$

Другой вариант записи таков: $\hat{L}_n f(t) = q_{n-1}(t)D_n f(t)$, где оператор D_n задается формулой

$$D_n f(t) = \left(\frac{d}{dt} + \sigma_{n-1}(t)\right) \left(\frac{d}{dt} + \sigma_{n-2}(t)\right) \dots \left(\frac{d}{dt} + \sigma_0(t)\right) f(t),$$

$\sigma_0(t) = \varphi_0(t)$, $\sigma_k(t) = k\varphi_k(t) + s_k(t)$, $s_k(t) = \sum_{i=0}^k \varphi_i(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), а рациональные функции $\varphi_k(t)$ имеют вид

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{t + c_k} \quad (t + c_k \neq 0, \quad k = 0, 1, \dots, n; \quad t \in \mathbb{R}^+). \quad (6)$$

Ставится аналогичная задача: построить полином $\tilde{L}_{n+1}(t)$ степени $n+1$ на базе рациональных функций (6), для которого выполнялись бы следующие условия:

$$\tilde{L}_{n+1}(t_i) = f(t_i) \quad (i = \overline{0, n}); \quad \hat{L}_{n+1}(\tilde{L}_{n+1}; t_j) = \hat{L}_{n+1}(f; t_j). \quad (7)$$

Положим $\omega_n(t) = (t - t_0)(t - t_1) \cdots (t - t_n)$.

Теорема 2. Многочлен

$$\tilde{L}_{n+1}(t) = L_n(t) + \frac{\omega_n(t) \hat{L}_{n+1}(f; t_j)}{q_n(t)(n+1)!}, \quad (8)$$

где

$$L_n(t) = \frac{1}{q_n(t)} \sum_{k=0}^n \frac{\omega_n(t) q_n(t_k)}{\omega'_n(t_k)(t - t_k)} f(t_k), \quad (9)$$

степени $n+1$ удовлетворяет условиям (7).

Доказательство. Действительно, нетрудно проверить, что выполняются условия $L_n(t_i) = f(t_i)$ ($i = \overline{0, n}$). Из этого следует выполнение первой группы равенств (7).

Применим далее оператор \hat{L}_{n+1} к базисным функциям $\varphi_k(t)$ ($k = \overline{0, n}$):

$$\begin{aligned} \hat{L}_{n+1}(\varphi_k(t)) &= \hat{L}_{n+1}\left(\frac{1}{t + c_k}\right) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left[\frac{q_n(t)}{t + c_k} \right] = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left[\frac{(t + c_0)(t + c_1) \cdots (t + c_n)}{t + c_k} \right] = \\ &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} [(t + c_0)(t + c_1) \cdots (t + c_{k-1})(t + c_{k+1}) \cdots (t + c_n)] = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} [q_n(t)] = 0. \end{aligned}$$

Многочлен (9) является многочленом вида $P_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{a_{nk}}{t + c_k}$. Поэтому применяя оператор \hat{L}_{n+1}

к $P_n(t)$ и к функции $\frac{\omega_n(t)}{q_n(t)}$, получим соответственно

$$\hat{L}_{n+1}(P_n(t)) = 0, \quad \hat{L}_{n+1}\left(\frac{\omega_n(t)}{q_n(t)}\right) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} [\omega_n(t)] = (n+1)!.$$

Таким образом,

$$\hat{L}_{n+1}\left(\frac{\omega_n(t) \hat{L}_{n+1}(f; t_j)}{q_n(t)(n+1)!}; t_j\right) = \hat{L}_{n+1}(f; t_j). \quad (10)$$

Учитывая (10), получаем, что второе равенство в (7) имеет место. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим интерполяционный полином (8) для $n = 1, 2$.

1. Пусть заданы различные узлы t_0 и t_1 , и в этих узлах известны значения $f(t_i)$ функции $f(t)$, а также значение оператора $\hat{L}_2(f; t_j)$ в одном из узлов t_j , где

$\hat{L}_2 f(t) = (t+c_0)(t+c_1)f''(t) + 2(2t+c_0+c_1)f'(t) + 2f(t)$, а $q_1(t) = (t+c_0)(t+c_1)$. При этом $q_1(t) \neq 0$ на полуоси $[0; \infty)$.

Полиномом $\tilde{L}_2(t)$ второй степени на базе рациональных функций $\varphi_k(t) = \frac{1}{t+c_k}$ ($k=0,1$), для которого выполнялись бы условия

$$\tilde{L}_2(t_i) = f(t_i) \quad (i=0,1); \quad \hat{L}_2(\tilde{L}_2; t_j) = \hat{L}_2(f; t_j),$$

будет $\tilde{L}_2(t) = L_1(t) + \frac{\omega_1(t)\hat{L}_2(f; t_j)}{2q_1(t)}$, где

$$L_1(t) = \frac{q_1(t_0)}{q_1(t)} \frac{t-t_1}{t_0-t_1} f(t_0) + \frac{q_1(t_1)}{q_1(t)} \frac{t-t_0}{t_1-t_0} f(t_1).$$

2. В случае трех узлов $t_0 < t_1 < t_2$ имеем

$$\hat{L}_3 f(t) = (t+c_0)(t+c_1)(t+c_2)f'''(t) + 3((t+c_0)(t+c_1) + (t+c_0)(t+c_2) + (t+c_1)(t+c_2))f''(t) + 6(3t+c_0+c_1+c_2)f'(t) + 6f(t).$$

И соответственно $\tilde{L}_3(t) = L_2(t) + \frac{\omega_2(t)\hat{L}_3(f; t_j)}{6q_2(t)}$,

где $L_2(t) = \frac{1}{q_2(t)} \sum_{k=0}^2 \frac{\omega_2(t)q_2(t_k)}{\omega_2'(t_k)(t-t_k)} f(t_k)$, $\omega_2(t) = (t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)$, $q_2(t) = (t+c_0)(t+c_1)(t+c_2)$.

Рассмотрим еще одну задачу интерполирования на базе рациональных функций $\varphi_k(t) = \frac{1}{(t+c)^k}$ ($k=\overline{0, n}$). Построим интерполяционный полином $\tilde{L}_{n+1}(t)$ степени $n+1$, для которого выполнялись бы условия

$$\tilde{L}_{n+1}(t_i) = f(t_i) \quad (i=\overline{0, n}); \quad \hat{L}_{n+1}(\tilde{L}_{n+1}; t_j) = \hat{L}_{n+1}(f; t_j), \quad (11)$$

где

$$\hat{L}_n f(t) = \frac{d^n [(t+c)^{n-1} f(t)]}{dt^n}, \quad (12)$$

причем в развернутой форме оператор (12) имеет вид

$$\hat{L}_n f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{n!(n-1)!(t+c)^{i-1} f^{(i)}(t)}{(i-1)!(n-i)!i!}.$$

Теорема 3. Многочлен

$$\tilde{L}_{n+1}(t) = L_n(t) + \frac{\omega_n(t)(t_j+c)^{n+2} \hat{L}_{n+1}(f; t_j)}{(t+c)^{n+1} (n+1)! c_n}, \quad (13)$$

где

$$L_n(t) = \frac{1}{(t+c)^n} \sum_{k=0}^n \frac{\omega_n(t)(t_k+c)^n}{(t-t_k)\omega_n'(t_k)} f(t_k), \quad c_n = (c+t_0)(c+t_1)\cdots(c+t_n),$$

степени $n+1$ удовлетворяет условиям (11).

Доказательство. Условия $L_n(t_i) = f(t_i)$ ($i = \overline{0, n}$) выполняются, а из этого следует и выполнение первого условия в группе равенств (11).

Так как

$$\hat{L}_{n+1}(\varphi_k(t)) = \hat{L}_{n+1}\left(\frac{1}{(t+c)^k}\right) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}[(t+c)^{n-k}] = 0, \quad (14)$$

а в силу возможного представления $L_n(t)$ в виде $L_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{a_{nk}}{(t+c)^k}$, получим, что

$$\hat{L}_{n+1}(L_n(t)) = 0. \quad (15)$$

Используя разложение $\omega_n(t) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\omega_n^{(k)}(-c)}{k!} (t+c)^k$, а также равенства (14) и (12), получим

$$\hat{L}_{n+1}\left(\frac{\omega_n(t)}{(t+c)^{n+1}}\right) = \hat{L}_{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{\omega_n^{(k)}(-c)}{k!(t+c)^{n-k+1}}\right) = \hat{L}_{n+1}\left(\frac{\omega_n(-c)}{(t+c)^{n+1}}\right) = \omega_n(-c) \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left[\frac{1}{t+c}\right]. \quad (16)$$

Так как $\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left[\frac{1}{t+c}\right] = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(t+c)^{n+2}}$, то, учитывая (16), будем иметь

$$\hat{L}_{n+1}\left(\frac{\omega_n(t)}{(t+c)^{n+1}}\right) = \frac{(n+1)!c_n}{(t+c)^{n+2}}.$$

Окончательно получаем, что

$$\hat{L}_{n+1}\left(\frac{\omega_n(t)(t_j+c)^{n+2}\hat{L}_{n+1}(f;t_j)}{(t+c)^{n+1}(n+1)!c_n}\right) = \hat{L}_{n+1}(f;t_j). \quad (17)$$

Из (15) и (17) следует выполнение второго условия в (11). Теорема доказана.

Рассмотрим частные случаи интерполяционного полинома (13).

1. В случае двух узлов t_0 и t_1 оператор \hat{L}_2 имеет вид $\hat{L}_2 f(t) = (t+c)f''(t) + 2f'(t)$.

Интерполяционным полиномом $\tilde{L}_2(t)$ второй степени на базе рациональных функций вида $\varphi_k(t) = \frac{1}{(t+c)^k}$ ($k = 0, 1$), для которого выполнялись бы следующие условия:

$$\tilde{L}_2(t_i) = f(t_i) \quad (i = 0, 1); \quad \hat{L}_2(\tilde{L}_2; t_j) = \hat{L}_2(f; t_j),$$

будет

$$\tilde{L}_2(t) = L_1(t) + \frac{\omega_1(t)(t_j+c)^3 \hat{L}_2(f; t_j)}{2(t+c)^2 c_1},$$

где

$$L_1(t) = \frac{t_0+c}{t+c} \frac{t-t_1}{t_0-t_1} f(t_0) + \frac{t_1+c}{t+c} \frac{t-t_0}{t_1-t_0} f(t_1).$$

2. В квадратичном случае оператор \hat{L}_3 имеет вид $\hat{L}_3 f(t) = (t+c)^2 f'''(t) + 6(t+c)f''(t) + 6f'(t)$, а соответствующим интерполяционным многочленом будет

$$\tilde{L}_3(t) = L_2(t) + \frac{\omega_2(t)(t_j + c)^4 \hat{L}_3(f; t_j)}{6(t+c)^3 c_2},$$

где

$$L_2(t) = \frac{1}{(t+c)^2} \sum_{k=0}^2 \frac{\omega_2(t)(t_k + c)^2}{(t-t_k)\omega_2'(t_k)c_2} f(t_k),$$

$$\omega_2(t) = (t-t_0)(t-t_1)(t-t_2), \quad c_2 = (c+t_0)(c+t_1)(c+t_2).$$

Экспоненциальное интерполирование. Пусть имеется, как и раньше, совокупность узлов $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. В этих узлах известны значения $f(x_i)$ ($i = \overline{0, n}$) функции $f(x)$. Также заданы действительные числа $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{n+1}$. Функцию $f(x)$ будем интерполировать с помощью обобщенных полиномов на базе экспоненциальных функций вида $\varphi_k(x) = e^{\lambda_k x}$ ($k = \overline{0, n+1}$).

Полином $L_n(x)$ вида $L_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k e^{\lambda_k x}$, удовлетворяющий условиям $L_n(x_k) = f(x_k)$ ($k = \overline{0, n}$), определяется однозначно.

Рассмотрим оператор $D_n(f; x) \equiv D_n f(x)$ вида

$$D_n f(x) = D(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \dots (D - \lambda_{n-1}) f(x),$$

где, как и раньше, $D = \frac{d}{dx}$.

Т е о р е м а 4. Интерполяционный многочлен Эрмита–Биркгофа

$$\tilde{L}_{n+1}(x) = L_n(x) + \frac{\Omega_{n+1}(x) D_{n+1}(f; x_i) e^{-\lambda_{n+1} x_i}}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \dots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)}, \quad (18)$$

где $\Omega_{n+1}(x) = e^{\lambda_{n+1} x} + \sum_{k=0}^n \alpha_k e^{\lambda_k x}$, удовлетворяет условиям

$$\tilde{L}_{n+1}(x_k) = f(x_k) \quad (k = \overline{0, n}); \quad D_{n+1}(\tilde{L}_{n+1}; x_i) = D_{n+1}(f; x_i).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, совпадение полинома $\tilde{L}_{n+1}(x)$ и интерполируемой функции $f(x)$ в узлах x_k следует из того, что $L_n(x_k) = f(x_k)$ и $\Omega_{n+1}(x_k) = 0$ для $k = 0, 1, \dots, n$.

Так как, по предположению, $D_{n+1}(e^{\lambda_k x}) = 0$ ($k = \overline{0, n}$), а $D_{n+1}(e^{\lambda_{n+1} x}) = \lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \dots (\lambda_{n+1} - \lambda_n) e^{\lambda_{n+1} x}$, то получим, что $D_{n+1}(\tilde{L}_{n+1}(x_i)) = D_{n+1}(f; x_i)$ ($i = \overline{0, n}$). Теорема доказана.

Рассмотрим линейный случай экспоненциального интерполирования. Пусть x_0 и x_1 – узлы интерполирования, и в этих узлах известны значения $f(x_0)$, $f(x_1)$ функции $f(x)$, а также заданы действительные числа $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Тогда формула (18) при $n = 1$ примет вид

$$\tilde{L}_2(x) = L_1(x) + \frac{\Omega_2(x) D_2(f; x_i) e^{-\lambda_2 x_i}}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)},$$

где

$$L_1(x) = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_1 x_1}}{e^{\lambda_1 x_0} - e^{\lambda_1 x_1}} f(x_0) + \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_1 x_0}}{e^{\lambda_1 x_1} - e^{\lambda_1 x_0}} f(x_1),$$

$$\Omega_2(x) = e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_2 x_0} + \frac{(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_1 x_0})(e^{\lambda_2 x_0} - e^{\lambda_2 x_1})}{e^{\lambda_1 x_1} - e^{\lambda_1 x_0}}, \quad D_2 f(x) = D(D - \lambda_1)f(x).$$

Заметим, что $\Omega_2(x_k) = 0$ для $k = 0, 1$, а $L_1(x)$ может быть представлен в виде

$$L_1(x) = f(x_0) + \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_1 x_0}}{e^{\lambda_1 x_1} - e^{\lambda_1 x_0}} [f(x_1) - f(x_0)].$$

Отметим, что ряд интерполяционных формул других типов для функций, а также для операторов в общих линейных, гильбертовых и функциональных пространствах получены в [6].

Литература

1. Жидков Н. П. Линейные аппроксимации функционалов. М., 1977.
2. Ибрагимов И. И. Методы интерполяции функций и их некоторые применения. М., 1971.
3. Турецкий А. Х. Теория интерполирования в задачах. Минск, 1968.
4. Янович Л. А., Игнатенко М. В. // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 5. С. 15–21.
5. Янович Л. А., Игнатенко М. В. // Актуальные проблемы анализа: Сб. науч. тр. Гродно, 2009. С. 198–215.
6. Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А. Интерполирование операторов. Киев, 2000.

A. P. HUDYAKOV

HERMITE–BIRKHOFF TYPE INTERPOLATION POLYNOMIALS WITH RESPECT TO PARTICULAR CHEBYSHEV SYSTEMS OF FUNCTIONS

Summary

The article is devoted to the construction of polynomials with respect to trigonometric, rational and exponential functions, satisfying the general interpolating Hermite–Birkhoff conditions.

УДК 512.542

Н. Н. ВОРОБЬЕВ¹, В. О. ПОБОЙНЕВ²

О БУЛЕВЫХ РЕШЕТКАХ ЧАСТИЧНО НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Полоцкий государственный аграрно-экономический колледж

(Поступила в редакцию 01.02 2010)

Все рассматриваемые группы конечны. Напомним, что непустая система формаций Θ называется полной решеткой формаций, если пересечение любой совокупности формаций из Θ снова принадлежит Θ , и во множестве Θ имеется такая формация \mathfrak{F} , что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{H} \in \Theta$. Формации, принадлежащие Θ , называют Θ -формациями (см. [1, 2]). Один из методов исследования Θ -формаций \mathfrak{F} состоит в изучении свойств решетки выделенной системы Θ -подформаций, входящих в \mathfrak{F} . В частности, рядом авторов исследовались Θ -формации, у которых решетка Θ -подформаций является булевой или решеткой с дополнениями для различных полных решеток формаций Θ [3–9].

Понятие дополняемой подформации введено в работе А. Н. Скибы [10], где были описаны разрешимые формации групп, у которых все их подформации дополняемы. Напомним, что подформация \mathfrak{M} называется дополняемой в \mathfrak{F} , если для нее существует дополнение в решетке всех подформаций формации \mathfrak{F} . В последующем в работах М. И. Эйдинова [11] и В. А. Ведерникова [12] были описаны формации, состоящие из произвольных конечных групп, у которых все подформации дополняемы. В связи с этим в работе [12] была поставлена задача описания насыщенных формаций, у которых все насыщенные подформации дополняемы. Эта задача была решена независимо А. Н. Скибой [3] и Го Вэнь Бинем [4]. Оказалось, что насыщенные формации, у которых все насыщенные подформации дополняемы, имеют булеву решетку насыщенных подформаций [3, 4] (см. также гл. 4 монографии [1]). Отметим также, что в работе А. Н. Скибы и Л. А. Шеметкова [13] были описаны формации конечных алгебр с булевой решеткой подформаций, содержащихся в некотором мальцевском многообразии.

В теории классов Фиттинга Н. Н. Воробьевым и А. Н. Скибой [14] получено описание n -кратно локальных классов Фиттинга с булевой решеткой n -кратно локальных подклассов Фиттинга (см. также работу [15]). Заметим, что при изучении булевых решеток классов Фиттинга [14, 15] использован ряд новых наблюдений о прямых разложениях классов групп, восходящих идейно к вышеупомянутой монографии [1].

Дополняя результаты [3–13], в данной работе дается описание τ -замкнутых n -кратно ω -насыщенных формаций с булевой решеткой τ -замкнутых n -кратно ω -насыщенных подформаций.

Определения и обозначения, которые мы не приводим, можно найти в [1, 2, 16].

Пусть ω – некоторое непустое множество простых чисел и $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Функции вида

$$f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$$

называются ω -локальными спутниками [2]. Для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$ символ $G_{\mathfrak{F}}$ обозначает произведение всех нормальных \mathfrak{F} -подгрупп группы G . В частности, через $G_{\omega d}$ обозначается наибольшая нормальная в G подгруппа N со свойством $\omega \cap \pi(H/K) \neq \emptyset$ для каждого композиционного фактора H/K из N ($G_{\omega d} = 1$, если $\omega \cap \pi(\text{Soc}(G)) = \emptyset$); через $F_p(G)$ обозначается наибольшая нормальная p -нильпотентная подгруппа группы G . Для всякого ω -локального спутника f определяют класс $LF_{\omega}(f) = (G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G))$, где $\pi(G)$ –

множество всех простых делителей порядка группы G . Если формация такова, что $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$ для некоторого ω -локального спутника f , то формацию \mathfrak{F} называют ω -насыщенной и говорят, что f – ω -локальный спутник формации \mathfrak{F} [2].

Напомним концепцию кратной локализации А. Н. Скибы [2]: всякая формация считается 0-кратно ω -насыщенной, а при $n > 0$ формация \mathfrak{F} называется n -кратно ω -насыщенной, если $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, где все непустые значения функции f являются $(n-1)$ -кратно ω -насыщенными формациями.

Нам необходимо следующее, предложенное А. Н. Скибой [1], определение: пусть со всякой группой G сопоставлена некоторая система ее подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что τ – подгрупповой функтор, если выполняются следующие условия: 1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G ; 2) для любого эпиморфизма $\varphi: A \rightarrow B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$. Формация \mathfrak{F} называется τ -замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой ее группы G . Подгрупповой функтор τ называется замкнутым, если для любых двух групп G и $H \in \tau(G)$ имеет место $\tau(H) \subseteq \tau(G)$. Пусть τ – произвольный подгрупповой функтор, $\bar{\tau}$ – пересечение всех таких замкнутых функторов τ_i , для которых $\tau(G) \subseteq \tau_i(G)$ для любой группы G . Функтор $\bar{\tau}$ называется замыканием функтора τ .

Пусть \mathfrak{M} и \mathfrak{H} – подформации формации \mathfrak{F} . Говорят, что \mathfrak{H} – τ -дополнение к \mathfrak{M} в \mathfrak{F} , если $\mathfrak{F} = \tau\text{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$ и \mathfrak{H} – τ -замкнутая подформация. Здесь символом $\tau\text{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$ обозначается пересечение всех τ -замкнутых ω -насыщенных формаций, содержащих формации \mathfrak{M} и \mathfrak{H} . Подформация формации \mathfrak{F} называется τ -дополняемой в \mathfrak{F} [1], если к ней имеется τ -дополнение в \mathfrak{F} .

Для произвольной τ -замкнутой n -кратно ω -насыщенной формации \mathfrak{F} через $L_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F})$ будем обозначать решетку всех τ -замкнутых n -кратно ω -насыщенных подформаций из \mathfrak{F} .

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – некоторая система непустых подклассов $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$. Следуя [1], будем писать $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ (или иначе $\mathfrak{F}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{F}_n$ в случае, когда $I = \{1, \dots, t\}$), если для любых двух различных $i, j \in I$ имеет место $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ и, кроме того, каждая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид $A_1 \times \dots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \dots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторого натурального t и $i_1, \dots, i_t \in I$.

Используя конструкцию прямого разложения класса групп, нами доказана следующая

Т е о р е м а. Пусть \mathfrak{F} – τ -замкнутая n -кратно ω -насыщенная формация. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) решетка $L_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F})$ булева;
- 2) $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – набор всех атомов решетки $L_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F})$;
- 3) в \mathfrak{F} τ -дополняема каждая подформация, являющаяся атомом решетки $L_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F})$.

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие леммы.

Л е м м а 1 [17, лемма 4]. Пусть A – монолитическая группа с неабелевым цоколем R , \mathfrak{M} – некоторая τ -замкнутая полуформация и $A \in L_{\omega_n}^{\tau} \text{form } \mathfrak{M}$. Тогда $A \in \mathfrak{M}$.

Для любой совокупности групп \mathfrak{X} через $S_{\tau} \mathfrak{X}$ обозначают (см. [1]) множество всех таких групп H , что $H \in \tau(G)$ для некоторой группы $G \in \mathfrak{X}$.

Л е м м а 2 [1, лемма 1.2.21]. Пусть \mathfrak{F} – τ -замкнутая полуформация, порожденная совокупностью групп \mathfrak{X} . Тогда $\mathfrak{F} = \text{QS}_{\tau}(\mathfrak{X})$.

Л е м м а 3 [1, следствие 4.3.6]. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – такая система τ -замкнутых подформаций формации \mathfrak{F} , что

$$\mathfrak{F} = \vee^{\tau}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \tau\text{form} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right)$$

и $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ для любых различных i и j из I . Тогда $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$.

Л е м м а 4 [18, теорема 1]. Пусть $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций \mathfrak{F}_i . Тогда формация \mathfrak{F} n -кратно ω -насыщенна в том и только в том случае, когда n -кратно ω -насыщенна каждая из формаций \mathfrak{F}_i .

Л е м м а 5 [1, лемма 4.3.4]. Пусть $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ и \mathfrak{M} – непустая подформация в \mathfrak{F} . Тогда $\mathfrak{M} = \bigoplus_{i \in I} (\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M})$.

Л е м м а 6 [1, лемма 4.3.5]. Пусть $I = \bigcup_{j \in J} I_j$ – разбиение множества I (т. е. для любых $j_1, j_2 \in J$, где $j_1 \neq j_2$, имеет место $I_{j_1} \cap I_{j_2} = \emptyset$). Тогда если $\mathfrak{F}_j = \bigoplus_{i \in I_j} \mathfrak{F}_i, j \in J$ и $\mathfrak{F} = \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{F}_j$, то $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$.

Л е м м а 7. Пусть $\mathfrak{F} = l_{\omega_n}^{\tau} \text{form} G$ – однопорожденная τ -замкнутая n -кратно ω -насыщенная формация. Тогда решетка $L_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F})$ имеет лишь конечное число атомов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть \mathfrak{M} – атом решетки $L_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{M} = l_{\omega_n}^{\tau} \text{form} A$, где A – простая группа. Если A – неабелева группа, то, согласно лемме 1, $A \in \mathfrak{H}$, где \mathfrak{H} – τ -замкнутая полуформация, порожденная группой G . Но ввиду леммы 2 $\mathfrak{H} = \text{QS}_{\tau}(G)$. Это означает, что в $L_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F})$ имеется лишь конечное число неразрешимых атомов.

Пусть A – группа простого порядка p . Поскольку p делит $|G|$ и группа G конечна, то в решетке $L_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F})$ имеется лишь конечное число разрешимых атомов. Лемма доказана.

Л е м м а 8. Пусть $\Sigma = \{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ – некоторый набор атомов решетки $l_{\omega_n}^{\tau}$, $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{M}_i$. Тогда формация \mathfrak{F} принадлежит решетке $l_{\omega_n}^{\tau}$ и если $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ – произвольная неединичная τ -замкнутая n -кратно ω -насыщенная подформация в \mathfrak{F} , то во множестве $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ найдется такое подмножество $\{\mathfrak{M}_j \mid j \in J\}$, что $\mathfrak{M} = \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{M}_j$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых двух различных $i, j \in I$ имеет место равенство $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M}_j = (1)$. Значит, ввиду леммы 3 $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{M}_i = \vee^{\tau}(\mathfrak{M}_i \mid i \in I)$ – τ -замкнутая формация, а ввиду леммы 4 формация \mathfrak{F} – n -кратно ω -насыщенна. Итак, $\mathfrak{F} \in l_{\omega_n}^{\tau}$.

Согласно лемме 5, $\mathfrak{M} = \bigoplus_{i \in I} (\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M})$. Так как \mathfrak{M}_i – атом решетки $l_{\omega_n}^{\tau}$, то $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M} \in \{(1), \mathfrak{M}_i\}$. Пусть J – такое подмножество в I , что $j \in J$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_j \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_j$. Тогда $\mathfrak{M} = \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{M}_j$. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Покажем, что из 3) вытекает 2). Прежде докажем, что условие 2) выполняется относительно любой однопорожденной $l_{\omega_n}^{\tau}$ -подформации \mathfrak{F}_1 из \mathfrak{F} . Согласно лемме 7, в \mathfrak{F}_1 имеется лишь конечное число подформаций, являющихся атомами решетки $L_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F}_1)$. Пусть \mathfrak{M} – один из таких атомов. Тогда по условию в \mathfrak{F} найдется такая τ -замкнутая подформация \mathfrak{H} , что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\tau} \mathfrak{H}$. Значит, по лемме 3 $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{H}$. А согласно лемме 4, последнее означает, что \mathfrak{H} – τ -замкнутая n -кратно ω -насыщенная формация. Так как у \mathfrak{H} число подформаций, являющихся атомами решетки $L_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F}_1)$, меньше чем у \mathfrak{F}_1 , то по индукции $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{M}_t$, где \mathfrak{M}_i – атом решетки $L_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F}_1), i = 1, \dots, t$. Значит, согласно лемме 6, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{M}_t$.

Пусть теперь $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – набор всех атомов решетки $L_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{H} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. По лемме 8 \mathfrak{H} – τ -замкнутая n -кратно ω -насыщенная подформация в \mathfrak{F} . Допустим, что $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$ и $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда,

согласно уже доказанному, $\mathfrak{F}_1 = l_{\omega_n}^\tau \text{form} G = \mathfrak{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{M}_r$ для некоторого набора атомов $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_r$ решетки $l_{\omega_n}^\tau$. Значит, $G \in \mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Противоречие. Итак, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Пусть имеет место условие 2). Покажем, что тогда выполняется и условие 1). Прежде установим, что решетка $L_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{F})$ является решеткой с дополнениями. Пусть \mathfrak{M} – произвольная τ -замкнутая n -кратно ω -насыщенная подформация формации \mathfrak{F} , $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I_1\}$ – набор всех тех подформаций из \mathfrak{M} , которые являются атомами решетки $l_{\omega_n}^\tau$. Ввиду леммы 8 $\mathfrak{M} = \bigoplus_{i \in I_1} \mathfrak{F}_i$. Пусть $I_2 = I \setminus I_1$, $\mathfrak{H} = \bigoplus_{i \in I_2} \mathfrak{F}_i$. Покажем, что \mathfrak{H} – дополнение к \mathfrak{M} в решетке $L_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{F})$. Ясно, что $\mathfrak{M} \vee_{\omega_n}^\tau \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Допустим, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \neq (1)$ и \mathfrak{X} – подформация в $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$, являющаяся атомом решетки $l_{\omega_n}^\tau$. Тогда найдется такое $i \in I$, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}_i$. Но $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Значит, согласно лемме 8, \mathfrak{X} не входит в одну из формаций \mathfrak{M} , \mathfrak{H} . Противоречие. Итак, $L_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{F})$ – решетка с дополнениями.

Для доказательства дистрибутивности решетки $L_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{F})$ рассмотрим три произвольные τ -замкнутые n -кратно ω -насыщенные подформации \mathfrak{M} , \mathfrak{H} и \mathfrak{X} из \mathfrak{F} . Ясно, что

$$(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{X}) \vee_{\omega_n}^\tau (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{X} \vee_{\omega_n}^\tau \mathfrak{H}).$$

Предположим, что обратное включение неверно. Пусть A – группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \cap (\mathfrak{X} \vee_{\omega_n}^\tau \mathfrak{H}) \setminus (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{X}) \vee_{\omega_n}^\tau (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$. Тогда A – монолитическая группа. Следовательно, найдется такое $i \in I$, что $A \in \mathfrak{F}_i$. Так как при этом \mathfrak{F}_i – атом решетки $L_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F}_i = l_{\omega_n}^\tau \text{form} A \subseteq \mathfrak{X} \vee_{\omega_n}^\tau \mathfrak{H}$. Отсюда, в силу условия 2) и леммы 8 получаем, что либо $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{X}$, либо $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{H}$. В любом из этих случаев оказывается, что $A \in (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{X}) \vee_{\omega_n}^\tau (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$. Полученное противоречие показывает, что решетка $L_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{F})$ дистрибутивна. Итак, если выполняется условие 2), то $L_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{F})$ является булевой решеткой.

Предположим, что выполняется условие 1). Покажем, что из него вытекает условие 3). При $n = 0$ это очевидно. Пусть $n \geq 1$ и пусть \mathfrak{M} – атом решетки $L_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{M} = l_{\omega_n}^\tau \text{form} A$, где A – простая группа из \mathfrak{M} . Ввиду того, что $L_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{F})$ – решетка с дополнениями, найдется такая τ -замкнутая n -кратно ω -насыщенная подформация \mathfrak{H} из \mathfrak{F} , что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{\omega_n}^\tau \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$. Пусть $\mathfrak{B} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{H}$. Ввиду леммы 3 имеет место равенство $\mathfrak{B} = \mathfrak{M} \vee_{\omega_n}^\tau \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \vee_{\omega_0}^\tau \mathfrak{H}$. Очевидно, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$. Согласно лемме 4 $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{\omega_n}^\tau \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{H} = \mathfrak{B}$. Итак, $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$, т. е. атом \mathfrak{M} дополняем в решетке $L_{\omega_n}^\tau(\mathfrak{F})$. Теорема доказана.

При $\omega = \mathbb{P}$ из теоремы вытекает

С л е д с т в и е 1 [1, теорема 4.3.13]. Пусть \mathfrak{F} – τ -замкнутая n -кратно насыщенная формация. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) решетка $L_n^\tau(\mathfrak{F})$ булева;
- 2) $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – набор всех атомов решетки $L_n^\tau(\mathfrak{F})$;
- 3) в \mathfrak{F} τ -дополняема каждая подформация, являющаяся атомом решетки $L_n^\tau(\mathfrak{F})$.

Если τ – тривиальный подгрупповой функтор и $\omega = \mathbb{P}$, то мы получаем

С л е д с т в и е 2 [3, теорема]. Пусть \mathfrak{F} – n -кратно насыщенная формация, $n \geq 0$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) решетка n -кратно насыщенных подформаций формации \mathfrak{F} булева;
- 2) $\mathfrak{F} = I_n \text{ form } \mathfrak{X}$, где \mathfrak{X} – некоторое множество простых групп, причем при $n \geq 61$ все группы из \mathfrak{X} абелевы;
- 3) в \mathfrak{F} дополняема каждая подформация, являющаяся атомом решетки n -кратно насыщенных формаций.

При $n = 1$ и $\omega = \{p\}$ для тривиального подгруппового функтора τ имеем

С л е д с т в и е 3 [5, теорема 1]. Пусть \mathfrak{F} – p -насыщенная формация. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) \mathfrak{F} есть прямое произведение своих минимальных p -насыщенных подформаций;
- 2) решетка p -насыщенных подформаций формации \mathfrak{F} булева;
- 3) в \mathfrak{F} дополняемы все минимальные p -насыщенные подформации.

Если $n = 1$ и $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ получим

С л е д с т в и е 4 [3, 12]. Пусть \mathfrak{F} – неединичная насыщенная формация. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) решетка насыщенных подформаций формации \mathfrak{F} булева;
- 2) формация \mathfrak{F} нильпотентна;
- 3) в \mathfrak{F} дополняема каждая подформация вида \mathfrak{R}_p , где p – некоторое простое число.

При $n = 0$ и $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ имеем

С л е д с т в и е 5 [3]. Пусть \mathfrak{F} – неединичная формация. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) решетка подформаций формации \mathfrak{F} булева;
- 2) каждая неединичная \mathfrak{F} -группа является прямым произведением некоторого конечного числа простых групп;
- 3) в \mathfrak{F} дополняема каждая подформация вида $\text{form } A$, где A – некоторая простая группа.

Если $n = 0$ и $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ имеем также

С л е д с т в и е 6 [11, 12]. Тогда и только тогда каждая подформация формации \mathfrak{F} дополняема в \mathfrak{F} , когда $\mathfrak{F} = \text{form } \mathfrak{X}$, где \mathfrak{X} – набор простых групп.

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Ф08М-118; БРФФИ–РФФИ, грант Ф10Р-231).

Литература

1. С к и б а А. Н. Алгебра формаций. Минск, 1997.
2. С к и б а А. Н., Ш е м е т к о в Л. А. // Матем. труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
3. С к и б а А. Н. // Изв. вузов. Сер. Математика. 1994. № 10. С. 75–80.
4. G u o W e n b i n // Chinese Science Bulletin. 1997. Vol. 42, N 5. P. 364–368.
5. Ж е в н о в а Н. Г., С к и б а А. Н. // Изв. вузов. Сер. Математика. 1997. № 5. С. 1–7.
6. Ж е в н о в а Н. Г. // Докл. АН Беларуси. 1997. Т. 41, № 5. С. 15–19.
7. С к а ч к о в а Ю. А. // Дискретная математика. 2002. Т. 14, вып. 3. С. 42–46.
8. G u o W e n b i n, S h u m K. P. // Comm. Algebra. 2002. Vol. 30, N 5. P. 2117–2131.
9. S a f o n o v V. G. // Algebra and discrete math. 2008. N 2. P. 109–122.
10. С к и б а А. Н. О формациях с заданными системами подформаций. Подгрупповое строение конечных групп. Минск, 1981. С. 155–180.
11. Э й д и н о в М. И. // О формациях с дополняемыми подформациями: Тезисы докл. IX Всесоюз. симпозиума по теории групп. М., 1984. С. 101.
12. В е д е р н и к о в В. А. // Вопросы алгебры. 1990. Вып. 5. С. 28–34.

13. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. // Украинский матем. журн. 1991. Т. 43, № 7, 8. С. 1008–1012.
14. Воробьев Н. Н., Скиба А. Н. // Сибирский матем. журн. 1999. Т. 40, № 3. С. 523–530.
15. Воробьев Н. Н. // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. 2002. № 5(14). С. 43–46.
16. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М., 1978.
17. Shemetkov L. A., Skiba A. N., Vorob'ev N. N. // Asian-European Journal of Math. 2009. Vol. 2, N 1. P. 155–169.
18. Воробьев Н. Н. // Вестник Витебск. ун-та. 1997. № 3. С. 55–58.

N. N. VOROB'EV, V. O. POBOINEV

BOOLEAN LATTICES OF PARTIALLY SATURATED FORMATIONS

Summary

A description of τ -closed n -multiply ω -saturated formations with Boolean sublattice of τ -closed n -multiply ω -saturated subformations is obtained.

Национальная академия наук Беларуси

УДК 512.542

С. Ф. КАМОРНИКОВ

О РЕШЕТКЕ ПОДГРУПП ФРАТТИНИЕВА ТИПА

Международный институт трудовых и социальных отношений, Гомель

(Поступила в редакцию 29.01.2010)

Введение. До недавних пор подгруппы фраттиниева типа изучались лишь с позиции анализа их внутреннего строения. Конечно, и на этом пути предлагались подходы, обозревающие достаточно широкие семейства подгрупп фраттиниева типа. Отметим, в частности, формационное направление, связанное с введением понятия \mathfrak{F} -абнормальной максимальной подгруппы и изучением пересечения $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ таких подгрупп в группе G [1–2], и арифметический подход, в рамках которого исследовались пересечения (например, $\Phi_p(G)$ и $\Phi_\pi(G)$) максимальных подгрупп заданного индекса [3–4].

В то же время связь подгрупп фраттиниева типа между собой, в контексте их решеточных свойств, практически не рассматривалась. Положение изменилось с выходом работ [5, 6], где, во-первых, введены регулярный подгрупповой m -функтор θ и подгруппа $\Phi_\theta(G)$ как собирательные образы инвариантной при гомоморфизмах системы максимальных подгрупп, с одной стороны, и подгруппы фраттиниева типа, с другой; во-вторых, описано строение и изучены свойства решетки M_{reg} всех регулярных m -функторов; в-третьих, подгруппа фраттиниева типа $\Phi_\theta(G)$ представлена как \mathfrak{X} -корадикал группы G относительно определенного класса групп \mathfrak{X} .

В данной работе изучаются свойства решетки $\text{Fit}(G)$. При этом рассматриваются произвольные конечные группы, т. е. всегда под группой подразумевается конечная группа. Нами используются определения и обозначения, принятые в [5, 7]. Наиболее часто встречающиеся здесь понятия мы определяем по ходу изложения материала.

Подгруппы фраттиниева типа. Согласно [5], подгрупповым m -функтором называется функция θ , которая сопоставляет каждой группе G некоторое множество $\theta(G)$ ее максимальных подгрупп и саму группу G . При этом предполагается, что если $\theta(G) = \{M_1, \dots, M_n, G\}$, то $\theta(G^\alpha) = \{M_1^\alpha, \dots, M_n^\alpha, G^\alpha\}$ для любого изоморфизма $\alpha: G \rightarrow G^\alpha$.

Подгрупповой m -функтор θ называется регулярным, если выполняются следующие условия:

- 1) из $N \triangleleft G$ и $M \in \theta(G)$ следует $MN / N \in \theta(G / N)$;
- 2) из $M / N \in \theta(G / N)$ следует $M \in \theta(G)$.

Множество всех регулярных m -функторов обозначим через M_{reg} . На этом множестве определим операции пересечения и объединения m -функторов, полагая

$$\begin{aligned}(\theta_1 \cap \theta_2)(G) &= \theta_1(G) \cap \theta_2(G), \\(\theta_1 \cup \theta_2)(G) &= \theta_1(G) \cup \theta_2(G)\end{aligned}$$

для любой группы G . Как показано в [5], m -функторы $\bigcap_{i \in I} \theta_i$ и $\bigcup_{i \in I} \theta_i$ регулярны и являются в M_{reg} соответственно нижней и верхней гранью множества $\{\theta_i \mid i \in I\}$. Таким образом, M_{reg} –

полная, бесконечно дистрибутивная решетка относительно частичного порядка, определяемого теоретико-множественным включением. Минимальным элементом (нулем) этой решетки является m -функтор θ такой, что $\theta(G) = \{G\}$ для любой группы G . В качестве ее максимального элемента (единицы) выступает m -функтор, выделяющий в каждой группе саму группу G и все ее максимальные подгруппы.

Если θ – регулярный подгрупповой m -функтор, то через $\Phi_\theta(G)$ обозначим θ -подгруппу Фраттини группы G , равную пересечению всех подгрупп, принадлежащих $\theta(G)$. Так как множество всех максимальных подгрупп группы G автоморфно допустимо, т. е. $M^\alpha \in \theta(G)$ для каждой подгруппы M из $\theta(G)$, то $\Phi_\theta(G)$ – характеристическая подгруппа группы G .

Будем говорить, что подгруппа N группы G является подгруппой фраттиниева типа, если $N = \Phi_\theta(G)$ для некоторого m -функтора $\theta \in M_{\text{reg}}$. Множество всех подгрупп фраттиниева типа из G обозначим через $\text{Fit}(G)$. Таким образом, $\text{Fit}(G) = \{\Phi_\theta(G) \mid \theta \in M_{\text{reg}}\}$.

Доказательство следующей леммы осуществляется простой проверкой.

Л е м м а 1. Если θ и τ – регулярные подгрупповые m -функторы, то для любой группы G справедливо равенство $\Phi_{\theta \cup \tau}(G) = \Phi_\theta(G) \cap \Phi_\tau(G)$.

Из леммы 1 следует, что множество $\text{Fit}(G)$, частично упорядоченное по включению, является нижней полурешеткой, а следовательно, и полной решеткой. Нулем этой решетки является подгруппа Фраттини $\Phi(G)$, а единицей – сама группа G . В дальнейшем точную верхнюю грань элементов N_1 и N_2 из $\text{Fit}(G)$ будем обозначать $N_1 \vee_\Phi N_2$.

На основании леммы 1 для отображения $f: \theta \mapsto \Phi_\theta(G)$ решетки M_{reg} в решетку $\text{Fit}(G)$ выполняется равенство $f(\theta_1 \cup \theta_2) = f(\theta_1) \cap f(\theta_2)$. В то же время не всегда выполняется равенство $f(\theta \cap \tau) = \Phi_{\theta \cap \tau}(G) = f(\theta) \vee_\Phi f(\tau)$. Отсюда, в частности, решетка $\text{Fit}(G)$ не является подрешеткой решетки всех нормальных подгрупп группы G .

Подгруппа фраттиниева типа как корадикал группы. Пусть \mathfrak{X} – некоторый класс групп. Следуя [7], через $R_0\mathfrak{X}$ обозначим класс всех конечных подпрямых произведений групп из \mathfrak{X} . Понятно, что $G \in R_0\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда в G имеются нормальные подгруппы N_i ($i = 1, \dots, t$), для которых $G/N_i \in \mathfrak{X}$ и $\bigcap_{i=1}^t N_i = 1$. Класс \mathfrak{X} называется R_0 -замкнутым, если $R_0\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма, доказательство которой можно найти в [7].

Л е м м а 2. Пусть \mathfrak{X} – R_0 -замкнутый класс, содержащий единичную группу. Тогда для любой группы G множество $\mathfrak{J} = \{N \triangleleft G \mid G/N \in \mathfrak{X}\}$, частично упорядоченное по включению, не пусто и имеет единственный минимальный элемент $\bigcap\{N \mid N \in \mathfrak{J}\}$, который обозначается через $G^{\mathfrak{X}}$ и называется \mathfrak{X} -корадикалом группы G .

В дальнейшем через \mathbf{P} будем обозначать класс всех примитивных групп. Напомним, что группа называется примитивной, если она обладает максимальной подгруппой с единичным ядром. Эта максимальная подгруппа называется примитиватором группы.

В [8] показано, что если G – примитивная группа и M – ее примитиватор, то выполняется одно из следующих условий:

- 1) G обладает единственной минимальной нормальной абелевой подгруппой N , которая дополняется подгруппой M ;
- 2) G обладает единственной минимальной нормальной неабелевой подгруппой N ;
- 3) G обладает двумя минимальными нормальными подгруппами N_1 и N_2 , которые неабелевы и дополняются примитиватором M .

Следуя [7] через \mathbf{P}_i обозначим класс всех примитивных групп, удовлетворяющих i -му условию ($i = 1, 2$ или 3). Понятно, что $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \cup \mathbf{P}_2 \cup \mathbf{P}_3$.

Очевидно, что если M – максимальная подгруппа группы G , то $G / \text{Core}_G(M)$ – примитивная группа. Верно и обратное: если $K \triangleleft G$ и G / K – примитивная группа, то группа G обладает такой максимальной подгруппой M , что $K = \text{Core}_G(M)$.

Пусть \mathfrak{X} – некоторый (в том числе и пустой) подкласс класса \mathcal{P} . Такой подкласс будем называть примитивным классом. Через $\mathcal{P}(G)$ обозначим класс всех групп, изоморфных примитивным факторгруппам группы G (если $G = 1$, то полагаем $\mathcal{P}(G) = \emptyset$).

Если \mathfrak{X} – некоторый класс групп, то через $R_0(\mathfrak{X}, 1)$ обозначим класс $R_0(\mathfrak{X}) \cup (1)$. Как следует из леммы II, 1.6 [7], для любого класса групп \mathfrak{X} класс $R_0(\mathfrak{X}, 1)$ является R_0 -замкнутым и содержит единичную группу. Поэтому на основании леммы 2 каждая группа обладает $R_0(\mathfrak{X}, 1)$ -корадикалом.

Л е м м а 3. Пусть \mathfrak{X} – некоторый примитивный класс. Тогда для любой группы G справедливо одно из следующих утверждений:

- 1) если $\mathcal{P}(G) \cap \mathfrak{X} = \emptyset$, то $R_0(\mathfrak{X}, 1)$ -корадикал группы G совпадает с G ;
- 2) если $\mathcal{P}(G) \cap \mathfrak{X} \neq \emptyset$, то $R_0(\mathfrak{X}, 1)$ -корадикал группы G совпадает с пересечением ядер всех тех

максимальных подгрупп M группы G , для которых факторгруппа $G / \text{Core}_G(M)$ принадлежит \mathfrak{X} .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\mathcal{P}(G) \cap \mathfrak{X} = \emptyset$, то в G нет факторгрупп, принадлежащих \mathfrak{X} . Поэтому ввиду леммы 2 $R_0(\mathfrak{X}, 1)$ -корадикал группы G совпадает с G .

Пусть теперь $\mathcal{P}(G) \cap \mathfrak{X} \neq \emptyset$. Тогда в G найдется по крайней мере одна факторгруппа G / N , принадлежащая \mathfrak{X} , а вместе с ней – максимальная подгруппа M , для которой $G / \text{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}$ и $N = \text{Core}_G(M)$. Обозначим пересечением ядер всех тех максимальных подгрупп M группы G , для которых факторгруппа $G / \text{Core}_G(M)$ принадлежит \mathfrak{X} , через R . Ввиду леммы 2 $R_0(\mathfrak{X}, 1)$ -корадикал группы G содержится в R .

Предположим, что $R_0(\mathfrak{X}, 1)$ -корадикал группы G строго содержится в R .

Тогда на основании леммы 2 в G найдется не содержащая R нормальная подгруппа N , для которой $G / N \in \mathfrak{X}$. Так как G / N – примитивная группа, то в G / N найдется максимальная подгруппа S / N , для которой $\text{Core}_{G/N}(S / N) = 1$. Отсюда следует, что S – максимальная подгруппа G , $\text{Core}_G(S) = N$ и $G / \text{Core}_G(S) \in \mathfrak{X}$. Значит, $R \subseteq \text{Core}_G(S) = N$. Пришли к противоречию. Лемма доказана.

Если θ – ненулевой регулярный m -функтор, то через $\mathcal{P}(\theta)$ обозначим класс всех тех примитивных групп A , у которых по крайней мере один примитиватор принадлежит $\theta(A)$.

З а м е ч а н и е. Пример простой неабелевой группы A показывает, что некоторые примитиваторы из A могут принадлежать $\theta(A)$, а некоторые могут не входить в $\theta(A)$.

Доказательство следующей леммы вытекает из регулярности подгруппового m -функтора θ .

Л е м м а 4. Для любого регулярного подгруппового m -функтора θ и любой группы G справедливо равенство $\Phi_\theta(G / \Phi_\theta(G)) = 1$. В частности, $\Phi(G / \Phi_\theta(G)) = 1$.

Т е о р е м а 1. Пусть θ – регулярный подгрупповой m -функтор. Если G – группа и $\mathfrak{X} = \mathcal{P}(\theta) \cap \mathcal{P}(G)$, то $R_0(\mathfrak{X}, 1)$ -корадикал группы G совпадает с подгруппой $\Phi_\theta(G)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{J} = \{N \triangleleft G \mid G / N \in \mathfrak{X}\} = \emptyset$. Это значит, что группа G не имеет факторгрупп, принадлежащих \mathfrak{X} , а поэтому $\theta(G) = \{G\}$. Следовательно, $\Phi_\theta(G) = G$ – $R_0(\mathfrak{X}, 1)$ -корадикал группы G .

Пусть теперь $\mathfrak{J} \neq \emptyset$. Тогда для любой подгруппы $N \in \mathfrak{J}$ найдется примитиватор M / N группы G / N , принадлежащий $\theta(G / N)$. Ввиду регулярности m -функтора θ имеем, что $M \in \theta(G)$. Кроме того, из $\text{Core}_{G/N}(M / N) = 1$ следует, что $\text{Core}_G(M) = N$. Отсюда на основании леммы 2

закключаем, что $\Phi_\theta(G) \subseteq \bigcap \{N \mid N \in \mathfrak{F}\}$, т. е. подгруппа $\Phi_\theta(G)$ содержится в $R_0(\mathfrak{X}, 1)$ -корадикале группы G .

Предположим, что $\Phi_\theta(G)$ – собственная подгруппа $R_0(\mathfrak{X}, 1)$ -корадикала R группы G . Пусть $L/\Phi_\theta(G)$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G/\Phi_\theta(G)$, содержащаяся в $R/\Phi_\theta(G)$. Ввиду леммы 4 $\Phi(G/\Phi_\theta(G)) = 1$. Поэтому найдется максимальная подгруппа $M/\Phi_\theta(G)$ группы $G/\Phi_\theta(G)$, которая не содержит $L/\Phi_\theta(G)$. Рассмотрим два возможных случая.

1. Пусть $M \in \theta(G)$. Тогда ввиду регулярности подгруппового m -функтора θ имеем $M/\text{Core}_G(M) \in \theta(G/\text{Core}_G(M))$. Кроме того, $G/\text{Core}_G(M) \in P(\theta) \cap P(G)$. Значит, $L \subseteq R \subseteq \text{Core}_G(M)$. Однако, это невозможно, так как M не покрывает главный фактор $L/\Phi_\theta(G)$. Пришли к противоречию.

2. Пусть все максимальные подгруппы группы G , не покрывающие $L/\Phi_\theta(G)$, не входят в $\theta(G)$. Но тогда ввиду регулярности m -функтора θ все максимальные подгруппы группы $G/\Phi_\theta(G)$, принадлежащие $\theta(G/\Phi_\theta(G))$, содержат $L/\Phi_\theta(G)$. Отсюда имеем $L/\Phi_\theta(G) \subseteq \Phi_\theta(G/\Phi_\theta(G))$. Однако это невозможно, так как ввиду леммы 4 выполняется равенство $\Phi_\theta(G/\Phi_\theta(G)) = 1$. Снова пришли к противоречию.

Следовательно, подгруппа $\Phi_\theta(G)$ является $R_0(\mathfrak{X}, 1)$ -корадикалом группы G . Теорема доказана.

В дальнейшем для группы G и регулярного подгруппового m -функтора θ класс $P(\theta) \cap P(G)$ обозначим через $P(G, \theta)$, а через $P_{\max}(G, \theta)$ обозначим примитивный класс, содержащий все группы из $P(G, \theta)$, а также те примитивные группы H из $P(G)$, которые обладают следующими свойствами:

1) все примитиваторы группы H не принадлежат $\theta(H)$;

2) всегда из максимальной подгруппы M в группе G и условия $G/\text{Core}_G(M) \cong H$ следует включение $\Phi_\theta(G) \subseteq M$.

Л е м м а 5. Пусть θ – регулярный подгрупповой m -функтор. Тогда для любой группы G и любого примитивного класса \mathfrak{X} , удовлетворяющего условию $P(G, \theta) \subseteq \mathfrak{X} \subseteq P_{\max}(G, \theta)$, подгруппа $\Phi_\theta(G)$ является $R_0(\mathfrak{X}, 1)$ -корадикалом группы G .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду леммы 3 имеем, что $R_0(P_{\max}(G, \theta), 1)$ -корадикал группы G совпадает с пересечением ядер всех тех максимальных подгрупп M группы G , для которых факторгруппа $G/\text{Core}_G(M)$ принадлежит $P_{\max}(G, \theta)$. Из определения класса $P_{\max}(G, \theta)$ следует, что из максимальной подгруппы M в группе G и условия $G/\text{Core}_G(M) \in P_{\max}(G, \theta) \setminus P(G, \theta)$ вытекает включение $\Phi_\theta(G) \subseteq \text{Core}_G(M)$. Поэтому на основании теоремы 1 $R_0(P_{\max}(G, \theta), 1)$ -корадикал группы G совпадает с $R_0(P(G, \theta), 1)$ -корадикалом группы G , а значит, совпадает с подгруппой $\Phi_\theta(G)$. Отсюда ввиду леммы 3 окончательно имеем, что подгруппа $\Phi_\theta(G)$ совпадает с $R_0(P(\mathfrak{X}, 1)$ -корадикалом группы G . Лемма доказана.

На основании лемм 1 и 3 для любых m -функторов θ и τ из M_{reg} и любой группы G подгруппа $\Phi_\theta(G) \cap \Phi_\tau(G)$ совпадает с $R_0(P(G, \theta) \cup P(G, \tau), 1)$ -корадикалом группы G .

Пример нециклической группы G порядка 6 показывает, что подгруппа $\Phi_\theta(G) \vee_\Phi \Phi_\tau(G)$ может не совпадать с $R_0(P(G, \theta) \cap P(G, \tau), 1)$ -корадикалом группы G .

В то же время имеет место следующая

Т е о р е м а 2. Пусть θ и τ – регулярные подгрупповые m -функторы. Тогда для любой группы G справедливы следующие утверждения:

- 1) подгруппа $\Phi_\theta(G) \cap \Phi_\tau(G)$ совпадает с $R_0(\mathbf{P}_{\max}(G, \theta) \cup \mathbf{P}_{\max}(G, \tau), 1)$ -корадикалом группы G ;
 2) подгруппа $\Phi_\theta(G) \vee_\Phi \Phi_\tau(G)$ совпадает с $R_0(\mathbf{P}_{\max}(G, \theta) \cap \mathbf{P}_{\max}(G, \tau), 1)$ -корадикалом группы G .

До к а з а т е л ь с т в о. Простая проверка показывает, что

$$P(G, \theta \cup \tau) = P(G, \theta) \cup P(G, \tau) \subseteq \mathbf{P}_{\max}(G, \theta) \cup \mathbf{P}_{\max}(G, \tau) \subseteq \mathbf{P}_{\max}(G, \theta \cup \tau).$$

Отсюда ввиду леммы 5 подгруппа $\Phi_\theta(G) \cap \Phi_\tau(G)$ совпадает с $R_0(\mathbf{P}_{\max}(G, \theta) \cup \mathbf{P}_{\max}(G, \tau), 1)$ -корадикалом группы G .

Из определения решетки $\text{Fit}(G)$ следует, что найдется такой регулярный подгрупповой m -функтор υ , что $\Phi_\upsilon(G) = \Phi_\theta(G) \vee_\Phi \Phi_\tau(G)$. В частности, υ равен пересечению всех таких ω из M_{reg} , для которых $\Phi_\theta(G) \cdot \Phi_\tau(G) \subseteq \Phi_\omega(G)$. Поэтому

$$P(G, \upsilon) \subseteq \mathbf{P}_{\max}(G, \theta) \cup \mathbf{P}_{\max}(G, \tau) \subseteq \mathbf{P}_{\max}(G, \upsilon).$$

Снова применяя лемму 5, получаем, что подгруппа $\Phi_\theta(G) \vee_\Phi \Phi_\tau(G)$ совпадает с $R_0(\mathbf{P}_{\max}(G, \theta) \cap \mathbf{P}_{\max}(G, \tau), 1)$ -корадикалом группы G . Теорема доказана.

Свойства решетки $\text{Fit}(G)$. Существует группа G , для которой решетка $\text{Fit}(G)$ не является модулярной. На это указывает, в частности, следующий

Пр и м е р. Пусть G_1 и G_2 – нециклические группы соответственно порядка 10 и 6. И пусть $G = G_1 \times G_2$. Если θ – регулярный подгрупповой m -функтор, выделяющий в G все ее максимальные подгруппы индекса, не делящегося на 5, то $\Phi_\theta(G)$ – силовская 5-подгруппа группы G . Если τ – регулярный подгрупповой m -функтор, выделяющий в G все ее максимальные подгруппы индекса, делящегося на 3, то $\Phi_\tau(G) = G_1$. Если ω – регулярный подгрупповой m -функтор, выделяющий в G все ее максимальные подгруппы индекса, делящегося на 5, то $\Phi_\omega(G) = G_2$. Теперь

$$\Phi_\tau(G) \cap (\Phi_\theta(G) \vee_\Phi \Phi_\omega(G)) = G_1 \cap G = G_1 \neq \Phi_\theta(G) = \Phi_\theta(G) \vee_\Phi 1 = \Phi_\theta(G) \vee_\Phi (\Phi_\tau(G) \cap \Phi_\omega(G)).$$

Таким образом, решетка $\text{Fit}(G)$ не является модулярной, а значит, не является дистрибутивной.

Далее запись (H_1, \dots, H_n) используется для обозначения класса групп, порожденного группами H_1, \dots, H_n .

Т е о р е м а 3. Пусть H_1, \dots, H_n – максимальная система попарно неизоморфных примитивных групп из $\mathbf{P}(G)$. Если X – множество, состоящее из группы G и всех \mathfrak{X}_i -корадикалов группы G , где $\mathfrak{X}_i = (H_i)$, $i = 1, \dots, n$, то:

- 1) для любого элемента решетки $\text{Fit}(G)$ существует \cap -представление с помощью элементов множества X ;
- 2) $|\text{Fit}(G)| \leq 2^n$.

До к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\theta \in M_{\text{reg}}$. Если $P(G, \theta) = \emptyset$, то ввиду теоремы 1 подгруппа $\Phi_\theta(G)$ совпадает с $R_0(\emptyset, 1)$ -корадикалом группы G , равным G .

Значит, $\mathfrak{X} = P(G, \theta) \neq \emptyset$. Отметим, что $P(G) = (H_1, \dots, H_n)$. Поэтому найдутся группы H_{i_1}, \dots, H_{i_k} ($k \geq 1$) такие, что $\mathfrak{X} = (H_{i_1}, \dots, H_{i_k})$.

Пусть $\mathfrak{X}_j = (H_{i_j})$, $j = 1, \dots, k$. И пусть θ_j – такой регулярный подгрупповой m -функтор, что $P(\theta_j) = (H_{i_j})$ и $\theta_j(H_{i_j})$ – множество всех примитиваторов группы H_{i_j} , принадлежащих $\theta(H_{i_j})$. Тогда ввиду леммы 1 подгруппа $\Phi_\theta(G)$ совпадает с пересечением θ_j -подгрупп

Фраттини группы G для всех $j=1, \dots, k$. На основании леммы 3 подгруппа $\Phi_\theta(G)$ совпадает с пересечением всех $R_0(\mathfrak{X}_j, 1)$ -корадикалов группы G , $j=1, \dots, k$. Утверждение 1) доказано.

Из утверждения 1) следует, что число элементов решетки $\text{Fit}(G)$ не превосходит числа всех подмножеств множества $\{H_1, \dots, H_n\}$. Поэтому $|\text{Fit}(G)| \leq 2^n$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть A – неабелева простая группа. И пусть $G = A_1 \times A_2$, где $A \cong A_1 \cong A_2$. Так как G – примитивная группа из \mathcal{P}_3 , то $\{G, A\}$ – максимальная система попарно неизоморфных групп из $\mathcal{P}(G, \theta)$. Очевидно, $\text{Fit}(G) = \{1, G\}$. Кроме того, $R_0((G), 1)$ -корадикал и $R_0((A), 1)$ -корадикал группы G единичны.

Таким образом, во множестве X из теоремы 3 некоторые из $R_0(\mathfrak{X}_j, 1)$ -корадикалов группы G могут быть равными.

В связи с теоремой 3 отметим следующие вопросы.

1. *Описать строение группы G , если решетка $\text{Fit}(G)$ является модулярной (дистрибутивной).*
2. *Описать строение группы G , если решетка $\text{Fit}(G)$ является решеткой с дополнением.*
3. *Пусть H_1, \dots, H_n – максимальная система попарно неизоморфных примитивных групп из $\mathcal{P}(G)$. Описать строение группы G , если решетка $\text{Fit}(G)$ содержит ровно 2^n элементов.*

Литература

1. Ш е м е т к о в Л. А. // Матем. сб. 1974. Т. 94, № 4. С. 628–648.
2. Ш е м е т к о в Л. А. Формации конечных групп. М., 1978.
3. D e s k i n s W. E. // Illinois J. Math. 1961. Vol. 5, N 2. P. 306–313.
4. Ш е м е т к о в Л. А., С к и б а А. Н. Формации алгебраических систем. М., 1989.
5. К а м о р н и к о в С. Ф., С е л ь к и н М. В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск, 2003.
6. К а м о р н и к о в С. Ф. // Классы групп, алгебр и их приложения: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 70-летию со дня рождения Л. А. Шеметкова. Гомель, 2007. С. 81–82.
7. D o e r k K., H a w k e s T. Finite soluble groups. Berlin; New York, 1992.
8. V a e r R. // Illinois J. Math. 1957. Vol. 1. P. 115–187.

S. F. KAMORNIKOV

LATTICE OF FRATTINI-TYPE SUBGROUPS

Summary

In the article some properties of the lattice of Frattini-type subgroups of a finite group are investigated.

УДК 511.36

О. С. КУКСО, Д. В. ВАСИЛЬЕВ, Д. В. КОЛЕДА

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ К ЗАДАЧЕ
О ЗНАЧЕНИЯХ ДИСКРИМИНАНТОВ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ**

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 26.03.2010)

Дискриминантом многочлена

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0, \quad (1)$$

называется число

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2, \quad (2)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – корни $P(x)$. Из (2) следует, что дискриминант $D(P) = 0$ тогда и только тогда, когда многочлен $P(x)$ имеет кратные корни. Более того, если значение $|D(P)|$ не велико, то это свидетельствует о наличии у $P(x)$ близких корней. Далее $H = H(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ – высота $P(x)$, $\#A$ – число элементов конечного множества A . Наиболее интересным и изученным в алгебре и теории чисел является случай, когда $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ [1, 2]. Тогда $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – алгебраические числа и если $D(P) \neq 0$, то $|D(P)| \geq 1$. Это следует из того, что дискриминант $D(P)$ может быть записан как некоторый определитель порядка $2n - 1$, составленный из коэффициентов $P(x)$ [1]. Первый столбец этого определителя содержит только 1 и n , поэтому он равен сумме двух определителей порядка $2n - 2$. Введем класс многочленов \mathcal{P}

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : H(P) \leq Q, \deg P = n\}. \quad (3)$$

Будем считать, что Q – достаточно большое число, и обозначим через c_1, c_2, \dots величины, зависящие только от n и не зависящие от Q . Для двух величин A и B будем писать $A \ll B$, если существует такое $c = c(n)$, что $A < cB$. Из представления $D(P)$ в виде определителя и (3) следует, что

$$|D(P)| < c_1 Q^{2n-2}, \quad c_2 Q^{n+1} < \#\mathcal{P}_n(Q) < c_3 Q^{n+1}. \quad (4)$$

Это, в частности, означает, что при $n \geq 4$ существуют отрезки числовой оси длины $c_4 Q^{n-3}$, не содержащие значений дискриминантов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$. При $n = 2$ каждое число из отрезка $[1, Q^2]$ должно приниматься в среднем $c_5 Q$ раз. Однако известно из курса школьной математики, что для многочленов второй степени $D(P) \not\equiv 2, 3 \pmod{4}$.

В данной работе мы докажем две теоремы о том, какие значения могут принимать дискриминанты многочленов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$.

Т е о р е м а 1. Существует не менее $c_6 Q^{1/n}$ многочленов $P(x)$, $H(P) \leq Q$, для которых при некотором $c_7 = c_7(n)$ выполняется неравенство

$$|D(P)| < c_7, |a_n| > c_8 H(P). \quad (5)$$

Т е о р е м а 2. Для любого $0 \leq m \leq n-1$ существует не менее $c_9 Q^{\frac{2(n+1)}{(m+1)(m+2)}}$ неприводимых многочленов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, с условием

$$|D(P)| < c_{10} Q^{\frac{4(2mn-m^2+n-m-1)}{(m+1)(m+2)}}.$$

Доказательство теоремы 1 основано на легко проверяемых фактах, что многочлены $P(x)$, $P_1(x) = P(x-m)$, $P_2(x) = x^n P(x^{-1})$ имеют один и тот же дискриминант. Рассмотрим многочлен

$$P(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-n)$$

с корнями $\alpha_1 = 1, \dots, \alpha_n = n$. При достаточно большом m положим $P_1(x) = P(x-m)$. Многочлен $P_1(x)$ имеет корни $m+1, m+2, \dots, m+n$. Его свободный член имеет порядок m^n , поэтому $c_{11} m^n < H(P) < c_{12} m^n$. Положим $Q = m^n$. Такой же порядок высоты будут иметь и многочлены $P_j(x) = P(x-m-j(n+1))$, $2 \leq j \leq m$, поскольку их свободные члены также имеют порядок Q . Для того чтобы выполнялось второе условие в (5), перейдем от многочленов $P_j(x)$ к многочленам $T_j(x) = x^n P_j(x^{-1})$, у которых старший коэффициент совпадает со свободным коэффициентом $P_j(x)$. Условие $a_n > cH$ обеспечивает выполнение неравенства $|\alpha_j| \ll 1$, что значительно упрощает вычисления. Поскольку $|D(T_j)| = |D(P_j)| = |D(P)| = c_7$, то теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Для многочлена $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ и некоторой точки x занумеруем все корни следующим образом:

$$|x - \alpha_1| \leq |x - \alpha_2| \leq \dots \leq |x - \alpha_n|. \quad (6)$$

Это означает, что α_1 – ближайший к x корень. Нам понадобятся две леммы.

Л е м м а 1 [2]. Для $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ и точки x выполняется

$$|x - \alpha_1| \leq n |P(x)| |P'(x)|^{-1}. \quad (7)$$

Л е м м а 2 [3]. Пусть $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^+$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \xi_i \leq 1, 0 \leq i \leq m-1; \xi_i \gg 1, m \leq i \leq n, \xi_0 < \varepsilon, \xi_n > \varepsilon^{-1}; \\ \prod_{i=0}^n \xi_i = 1, 0 < m \leq n, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\varepsilon > 0$. Существуют такие положительные постоянные $\delta_0 = \delta_0(n)$ и $c_0 = c_0(n)$, при которых будет выполняться следующее условие: для любого интервала $J \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ найдется достаточно малая величина $\varepsilon = \varepsilon(n, J) > 0$ такая, что существует измеримое множество $G_J \subset J$ с мерой

$$\mu G_J \geq \frac{3}{4} \mu J, \quad (9)$$

для которого найдутся, по крайней мере, 2 неприводимых многочлена $P_i \in \mathbb{Z}[x]$, $i = 1, 2$, степени, в точности равной $n \geq 2$, что для них будет верно

$$\delta_0 \xi_j \leq |P_i^{(j)}(x)| \leq c_0 \xi_j, 0 \leq j \leq n, a_n \gg H. \quad (10)$$

Конкретизируем выбор параметров в (10). Для любого m , $0 \leq m < n$, по лемме 2, найдется точка $x_1 \in G_J$, для которой можно построить неприводимый многочлен, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\begin{aligned} \delta_0 Q^{-v_0} &\leq |P_i(x_1)| \leq c_0 Q^{-v_0}, \quad i = 1, 2, \\ \delta_0 Q^{-v_j} &\leq |P_i^{(j)}(x_1)| \leq c_0 Q^{-v_j}, \quad 1 \leq j \leq m, \quad v_0 + v_1 + \dots + v_m = n - m, \\ \delta_0 Q &\leq |P_i^{(j)}(x_1)| \leq c_0 Q, \quad m + 1 \leq j. \end{aligned} \quad (11)$$

Дополнительно потребуем, чтобы последовательность d_1, \dots, d_{m+1} , определенная равенствами

$$d_j = v_{j-1} - v_j, 1 \leq j \leq m, d_{m+1} = v_m + 1 \quad (12)$$

не возрастала. Покажем, что неравенства (11) позволяют получить следующие оценки для расстояний между x_1 и первыми $m + 1$ корнями многочлена:

$$\begin{aligned} |x_1 - \alpha_j| &\ll Q^{-v_{j-1} + v_j}, \quad 1 \leq j \leq m, \\ |x_1 - \alpha_{m+1}| &\ll Q^{-v_m - 1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для $j = 1$ это верно по лемме 1. Предположим, что утверждение верно для всех α_i , $i \leq j - 1$. Если для некоторого $i < j$ найдется достаточно большое число $s_1 = c(n)$ такое, что

$$|x_1 - \alpha_j| < s_1 |x_1 - \alpha_i|, \quad (14)$$

то из (6) и (12) имеем

$$|x_1 - \alpha_j| \ll Q^{-v_{j-1} + v_j}.$$

Рассмотрим противоположный случай, когда для всех $i < j$ расстояние $|x_1 - \alpha_j|$ значительно превышает $|x_1 - \alpha_i|$, т. е. выполняется неравенство, противоположное (14):

$$|x_1 - \alpha_j| \geq s_1 |x_1 - \alpha_i|. \quad (15)$$

Тогда дифференцируя многочлен $P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$ последовательно $j - 1$ раз, можно записать $P^{(j-1)}(x_1)$ в виде

$$P^{(j-1)}(x_1) = a_n((x - \alpha_j) \dots (x - \alpha_n) + \sum_{i_j} (x - \alpha_{i_1}) \dots (x - \alpha_{i_{n-j}})), \quad (16)$$

где в сумму \sum_{i_j} входят слагаемые, в которых обязательно присутствуют множители $(x - \alpha_{i_j})$ с $i_j < j$.

Из (15) следует, что

$$|x - \alpha_j| \dots |x - \alpha_n| > 2 \sum_{i_j} |x - \alpha_{i_1}| \dots |x - \alpha_{i_{n-j}}| \quad (17)$$

и

$$|P^{(j-1)}(x_1)| > \frac{1}{2} a_n |x - \alpha_j| \dots |x - \alpha_n|. \quad (18)$$

Вычислим производную порядка j и оценим сверху $|x_1 - \alpha_j| |P^{(j)}(x_1)|$. Получим

$$|x_1 - \alpha_j| |P^{(j)}(x_1)| < 2a_n |x - \alpha_j| \dots |x - \alpha_n|. \quad (19)$$

Тогда из (17) имеем

$$|x_1 - \alpha_j| |P^{(j)}(x_1)| < 4 |P^{(j-1)}(x_1)| \quad (20)$$

и

$$|x_1 - \alpha_j| < 4 |P^{(j-1)}(x_1)| |P^{(j)}(x_1)|^{-1}. \quad (21)$$

Неравенства (11) и (21) вновь приводят к оценке

$$|x_1 - \alpha_j| \ll Q^{-v_{j-1} + v_j}. \quad (22)$$

Потребуем выполнение равенств

$$\theta = v_{j-1} - v_j = v_m + 1, 1 \leq j \leq m, \quad (23)$$

что обеспечивает справедливость (12).

Из (23) имеем

$$v_0 = 2v_1 - v_2 = 3v_2 - 2v_3 = \dots = (k+1)v_k - kv_{k+1}, 1 \leq k \leq m-1. \quad (24)$$

Сложим равенства

$$v_{j-1} = v_m + 1 + v_j, 1 \leq j \leq m.$$

Получим

$$v_0 + v_1 + \dots + v_{m-1} = mv_m + m + v_1 + \dots + v_m,$$

откуда

$$v_0 = (m+1)v_m + m. \quad (25)$$

Из (25) находим

$$v_m = \frac{v_0 - m}{m+1}. \quad (26)$$

Решим уравнения (24) относительно v_{m-1} , используя (26):

$$v_{m-1} = \frac{1}{m}(v_0 + (m-1)v_m) = \frac{2v_0 - m + 1}{m+1}. \quad (27)$$

Аналогично найдем v_k , $1 \leq k \leq m-2$, через v_0

$$v_k = \frac{(m-k+1)v_0 - k}{m+1}, 1 \leq k \leq m-2. \quad (28)$$

Найдем $S = \sum_{k=0}^m v_k$ из (26)–(28):

$$S = v_0 + v_m + \sum_{k=1}^{m-1} v_k = v_0 + \frac{v_0 - m}{m+1} + \frac{1}{m+1} ((m+1)v_0 - (1+v_0) \sum_{k=1}^{m-1} k) = v_0 + \frac{v_0 - m}{m+1} + \frac{1}{m+1} ((m+1)v_0 - \frac{(m-1)m}{2}(1+v_0)). \quad (29)$$

Так как по (11) выполняется $S = n - m$, то решим уравнение (29) относительно v_0 . Получим

$$v_0 = \frac{2n - m}{m + 2}. \quad (30)$$

Оценим сверху произведение

$$T(m) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} |\alpha_i - \alpha_j|^2.$$

Из (23) для всех i и j

$$|\alpha_i - \alpha_j| \leq |x_1 - \alpha_i| + |x_1 - \alpha_j| \leq 2|x_1 - \alpha_j| \ll Q^{-\theta},$$

поэтому

$$T \ll Q^{-2\theta C_m^2} = Q^{-(v_0+1) \frac{m(m-1)}{m+1}}. \quad (31)$$

Подставим v_0 из (30) в (31). Так как

$$|D(P)| \ll Q^{2n-2} T \ll Q^{2n-2-2 \frac{(n+1)m(m-1)}{(m+1)(m+2)}} \quad (32)$$

получаем

$$|D(P)| \ll Q^{\frac{2mn-m^2+n-m-1}{(m+1)(m+2)}}. \quad (33)$$

В точке $x_1 \in G_J$ мы построили многочлен, дискриминант которого удовлетворяет (33).

Исключим из G_J интервал G_{J_1} с центром в точке x_1 , длины $c(n)Q^{\frac{v_0+1}{m+1}}$. Из полученного подмножества возьмем теперь точку $x_2 \in G_J \setminus G_{J_1}$ и построим новый многочлен с дискриминантом, удовлетворяющим (33). Так будет продолжаться до тех пор, пока мы не исчерпаем множество

G_J , при этом построив не менее $c(n)Q^{\frac{2(n+1)}{(m+1)(m+2)}}$ многочленов.

Литература

1. Van Der Warden B. L. Algebra. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1971.
2. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск, 1967.
3. Beresnevich V., Bernik V., Goetze F. // Composito Math. 2010. Vol. 146. P. 1165–1179.

O. S. KUKSO, D. V. VASILYEV, D. V. KALJADA

APPLICATION OF METRIC TRANSCENDENTAL NUMBER THEORY TO THE PROBLEM OF DISCRIMINANT VALUES FOR INTEGRAL POLYNOMIALS

Summary

In the article the distribution of the number of integral polynomials with given discriminants is found.

УДК 511.36

Е. В. ПИРЮТКО

**МНОГОМЕРНАЯ ЛЕММА ГЕНЗЕЛЯ И СОВМЕСТНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ
 p -АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ**

Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка

(Поступила в редакцию 19.02.2010)

Введение. В работе [1] исследована задача о приближениях p -адических чисел алгебраическими p -адическими числами. Рассмотрим многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbf{Z}[x]$. Пусть $w \in \mathbf{Z}_p$ и пусть $\alpha \in \mathbf{Q}_p^*$ – ближайший к w корень α многочлена $P(x)$, где через \mathbf{Q}_p^* мы обозначили наименьшее поле, содержащее p -адические и алгебраические числа. В работе [1] показано, что при некоторых оценках на значения $|P(w)|_p$ и $|P'(w)|_p$, α принадлежит \mathbf{Z}_p . Кроме того, получена оценка на разность $|w - \alpha|_p$, улучшающая оценку в лемме Гензеля. Некоторые задачи о связи между значениями $|P(w)|_p$ и $|w - \alpha|_p$ исследованы в [2].

В данной работе рассматривается аналог оценок, полученных в [1], для совместных приближений двух p -адических чисел $(w_1, w_2) \in \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$ корнями многочлена $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$.

Далее мы будем использовать обозначение $a \gg 1$, если a не менее некоторой заданной константы. Также будем обозначать через $H(P)$ высоту многочлена $P(x)$.

Основной результат. В статье доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть

$$(w_1, w_2) \in \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p, |w_1 - w_2|_p > \delta.$$

Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n) \in \mathbf{Z}[x]$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$, норма $|a_n|_p$ не менее некоторой константы ($|a_n|_p \gg 1$) и $H(P) \leq Q$, где Q – фиксированное целое достаточно большое число, $Q > Q_0(n)$. Если выполнены условия

$$\begin{aligned} |P(w_1)|_p &< c_1(n) Q^{-v_1} \\ |P(w_2)|_p &< c_2(n) Q^{-v_2} \\ c_2(n) Q^{-v_3} &< |P'(w_1)|_p < c_1(n) Q^{-v_3} \\ c_2(n) Q^{-v_4} &< |P'(w_2)|_p < c_1(n) Q^{-v_4}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$v_i > 0, I = 1, \dots, 4, \sum_{i=1}^4 v_i = n + 1,$$

где $c_1(n), c_2(n)$ – константы, зависящие только от n , то

1) ближайший к w_1 (соответственно к w_2) корень α_i (соответственно α_j) многочлена $P(x)$:

$$|w_1 - \alpha_i|_p = \min_{1 \leq k \leq n} |w_1 - \alpha_k|_p \quad (\text{соответственно } |w_2 - \alpha_j|_p = \min_{1 \leq k \leq n} |w_2 - \alpha_k|_p)$$

удовлетворяет оценке

$$|w_1 - \alpha_i|_p < c_3(n) Q^{-v_1+v_3} \quad (\text{соответственно } |w_2 - \alpha_j|_p < c_4(n) Q^{-v_2+v_4}); \quad (2)$$

2) $i \neq j$ и хотя бы один из корней α_i или α_j принадлежит \mathbf{Z}_p при условиях

$$\begin{aligned}
n + \frac{1}{3} < v_1 + v_2 < n + 1, \\
v_1 > 2v_3, v_2 > 2v_4, \\
\delta > \max\{Q^{-v_1+2v_3}, Q^{-v_2+2v_4}\}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Заметим, что условия (3) слабее условий в работе [1], т. е. представленный результат не следует из [1].

Как показывает следующий результат [3, 4], условия (1) не являются слишком ограничительными: при некотором выборе констант $c_1(n)$ и $c_2(n)$ условия (1) выполняются для любого многочлена и для более половины по мере Хаара чисел w .

Теорема 2 [3, 4]. Пусть $v_i > 0, i = 1, \dots, 4, \sum_{i=1}^4 v_i = n + 1, Q > Q_0(n)$. Пусть $r_1, r_2 > 0$ и $K = \{(w_1, w_2) \in \mathbf{Q}_p \times \mathbf{Q}_p : |w_i|_p \leq r_i, i = 1, 2\}$. Существуют константы $c_1(n), c_2(n)$, зависящие только от n , такие, что условия (1) выполняются для любого многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbf{Z}[x]$, такого, что $|a_n|_p \gg 1$ и $\forall w \in B \subset K$, где

$$\mu B > \frac{1}{2} \mu K.$$

Многомерная лемма Гензеля. Рассмотрим сначала следующий многомерный аналог этой леммы.

Многомерная лемма Гензеля. Пусть $f_i(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{Z}_p[x], i = 1, \dots, n, f = (f_1, \dots, f_n)$. Обозначим

$$x = (x_1, \dots, x_n), |x|_p = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|_p, M_f(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j} \text{ и } J_f(x) = \det M_f(x). \text{ Если для некоторого } z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{Z}_p^n$$

выполнено условие

$$|f(z)|_p < |J_f(z)|_p^2,$$

то последовательность

$$w_0 = z, w_{n+1} = w_n - M_f^{-1}(w_n) f(w_n)$$

сходится к $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbf{Z}_p^n$ такому, что $f(\gamma) = 0$. При этом выполнена оценка

$$|z - \gamma|_p < |f(z)|_p / |J_f(z)|_p^{-2}.$$

Доказательство. Докажем сначала, что если $M = (a_{ij}) \in Gl_n(\mathbf{Z}_p)$ обратимая матрица с целыми p -адическими коэффициентами, то для любого n -вектора v выполняется: $|M^{-1}v|_p \leq |v|_p |J|_p^{-1}$, где $J = \det M$. Действительно, так как $M^{-1} = \frac{1}{\det M} (A_{ij})$, где A_{ij} – соответствующие миноры, то

$$|M^{-1}v|_p = \frac{1}{|\det M|_p} \max_{1 \leq i \leq n} |A_{i1}v_1 + \dots + A_{in}v_n|_p \leq \frac{1}{|\det M|_p} \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|_p, \text{ так как } A_{ij} \in \mathbf{Z}_p \text{ и, следовательно, } |A_{ij}|_p \leq 1. \text{ Таким образом, } |M^{-1}v|_p \leq |v|_p |J|_p^{-1}.$$

Обозначим $c = |f(z)|_p |J_f(z)|_p^{-2}$ и покажем по индукции, что

I. $|w_n|_p \leq 1$;

II. $|w_{n+1} - w_n|_p \leq c$;

III. $|f(w_n)|_p |J_f(w_n)|_p^{-2} \leq c^{2^n}$.

При $n = 0$ утверждения I–III выполняются по условию леммы. Предположим, что эти утверждения верны для n , и докажем для $n + 1$. Действительно, так как $|w_n|_p \leq 1$, то $w_n \in \mathbf{Z}_p$ и $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(w_n) \right|_p \leq 1$,

откуда $|J_f(w_n)|_p \leq 1$. Имеем: $|w_{n+1} - w_n|_p = |M_f^{-1}(w_n) f(w_n)|_p \leq |f(w_n)|_p |J_f(w_n)|_p^{-1} \leq |f(w_n)|_p |J_f(w_n)|_p^{-2} \leq c$.

Следовательно, $|w_{n+1}| \leq \max\{|w_{n+1} - w_n|_p, |w_n|_p\} \leq 1$ и $|w_{n+1} - w_0|_p \leq \max\{|w_{n+1} - w_n|_p, |w_n - w_0|_p\} \leq c$, откуда получаем I и II.

Докажем III. Обозначим через $M_{m \times n}(\mathbf{Z}_p)$ множество всех $m \times n$ -матриц с коэффициентами в \mathbf{Z}_p . Расписывая каждый из многочленов $f_i(x)$ по степеням $x - w_n$, имеем формулу Тейлора: $f(w_{n+1}) = f(w_n) + M_f(w_n)(w_{n+1} - w_n) + \varepsilon(w_{n+1} - w_n)^2$ для некоторого $\varepsilon \in M_{n \times n}(\mathbf{Z}_p)$. Таким образом, $|f(w_{n+1})|_p = |f(w_n) + M_f(w_n)(w_{n+1} - w_n) + \varepsilon(w_{n+1} - w_n)^2|_p \leq |f(w_n)|_p + |M_f(w_n)(w_{n+1} - w_n)|_p + |\varepsilon(w_{n+1} - w_n)^2|_p \leq |f(w_n)|_p + |M_f(w_n)|_p |w_{n+1} - w_n|_p + |\varepsilon|_p |w_{n+1} - w_n|_p^2 \leq |f(w_n)|_p + |M_f(w_n)|_p |w_{n+1} - w_n|_p + |\varepsilon|_p |w_{n+1} - w_n|_p^2$, так как $w_n \in \mathbf{Z}_p$ и $M_f(w_n) \in Gl_n(\mathbf{Z}_p)$. Следовательно,

$$|f(w_{n+1})|_p \leq |f(w_n)|_p + |M_f(w_n)|_p |w_{n+1} - w_n|_p + |\varepsilon|_p |w_{n+1} - w_n|_p^2. \quad (4)$$

Так как $J_f(w_{n+1})$ – многочлен от w_{n+1} , то, аналогично, из формулы Тейлора имеем для некоторого $\tau \in M_{1 \times n}(\mathbf{Z}_p)$

$$\begin{aligned} |J_f(w_{n+1})|_p &= |J_f(w_n) + \tau(w_{n+1} - w_n)|_p = |J_f(w_n) - \tau M_f^{-1}(w_n) f(w_n)|_p = \\ &= |J_f(w_n)|_p \left| 1 - \frac{1}{J_f(w_n)} \tau M_f^{-1}(w_n) f(w_n) \right|_p = |J_f(w_n)|_p \left| 1 - \frac{1}{J_f(w_n)} \tau M_f^{-1}(w_n) f(w_n) \right|_p \end{aligned} \quad (5)$$

так как $\frac{1}{|J_f(w_n)|_p} |\tau M_f^{-1}(w_n) f(w_n)|_p \leq \frac{1}{|J_f(w_n)|_p} |M_f^{-1}(w_n) f(w_n)|_p \leq |f(w_n)|_p |J_f(w_n)|_p^{-2} < 1$.

Таким образом, из (4) и (5) получаем, что $|f(w_{n+1})|_p |J_f(w_{n+1})|_p^{-2} \leq |f(w_n)|_p^2 |J_f(w_n)|_p^{-4} \leq c^{2^{n+1}}$, откуда следует III.

Утверждение леммы следует из условий I–III. Действительно, по условию III и по построению, последовательность w_n является последовательностью Коши. Так как поле \mathbf{Q}_p является полным и $|w_n|_p \leq 1$, последовательность w_n сходится к некоторому $\gamma \in \mathbf{Z}_p^n$, $|z - \gamma|_p < |f(z)|_p |J_f(z)|_p^{-2}$ из условия II и $f(\gamma) = 0$ из (4) и (5).

Доказательство теоремы 1. Оценки (2) аналогичны оценкам в работе [1]: так как

$$\left| \frac{P'(w_1)}{P(w_1)} \right|_p = \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{w_1 - \alpha_k} \right|_p \leq \left| \frac{1}{w_1 - \alpha_i} \right|_p,$$

то $|w_1 - \alpha_i|_p < |P(w_1)|_p |P'(w_1)|_p^{-1} < c_3(n) Q^{-v_1+v_3}$. Аналогично получаем оценку для w_2 .

При условии (3) докажем, что $\alpha_i \in \mathbf{Z}_p$ или $\alpha_j \in \mathbf{Z}_p$. Так как $v_1 > 2v_3$ и $v_2 > 2v_4$, то $|P(w_1)|_p \leq |P'(w_1)|_p^2$ и $|P(w_2)|_p \leq |P'(w_2)|_p^2$. Таким образом, для каждого из w_1 и w_2 можно применить лемму Гензеля:

последовательность $y_0 = w_1, y_{n+1} = y_n - \frac{P(y_n)}{P'(y_n)}$ (соотв. $z_0 = w_2, z_{n+1} = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)}$) сходится к кор-

ню $\alpha_i \in \mathbf{Z}_p$ (соотв. $\alpha_j \in \mathbf{Z}_p$) многочлена $P(x)$ и $|w_1 - \alpha_i|_p < |P(w_1)|_p |P'(w_1)|_p^{-2} < c_5(n) Q^{-v_1+2v_3}$ (соотв. $|w_2 - \alpha_j|_p < |P(w_2)|_p |P'(w_2)|_p^{-2}$).

Следует заметить, что в случае, когда рассматриваются совместные приближения, возможно применить лемму Гензеля отдельно для каждой их переменных. Применение же многомерной леммы Гензеля для $f = (P(x_1), P(x_2))$ дает более слабую оценку, например, для w_1 : $|w_1 - \alpha_i|_p < Q^{-v_1+2v_3+2v_4}$ при более сильных условиях: $v_1 > 2v_3 + 2v_4$. Однако, если $f = (P_1(x_1, x_2), P_2(x_1, x_2))$, то применение леммы отдельно для каждой их переменных становится затруднительным.

Докажем, что $i \neq j, i \neq j', i' \neq j$ и $i' \neq j'$. Предположим противное. Пусть $k = i$ или $i', l = j$ или j' – пара совпадающих индексов. Тогда

$$\delta < |w_1 - w_2|_p \leq \max\{|w_1 - \alpha_k|_p, |w_2 - \alpha_l|_p\} < \max\{Q^{-v_1+2v_3}, Q^{-v_2+2v_4}\}.$$

Получаем противоречие с условием (3).

Докажем далее, что $\alpha_i = \alpha_{i'}$ или $\alpha_j = \alpha_{j'}$. Таким образом, получим $\alpha_i \in \mathbf{Z}_p$ или $\alpha_j \in \mathbf{Z}_p$. Предположим противное: $\alpha_i \neq \alpha_{i'}$ и $\alpha_j \neq \alpha_{j'}$. Тогда индексы i, i', j, j' различны и

$$|\alpha_i - \alpha_{i'}|_p \leq \max\{ |w_1 - \alpha_i|_p, |w_1 - \alpha_{i'}|_p \} = |w_1 - \alpha_{i'}|_p < |P(w)|_p |P'(w)|_p^{-2} < c_5(n) Q^{-v_1+2v_3}$$

из условий (1). Аналогично, $|\alpha_j - \alpha_{j'}|_p < c_6(n) Q^{-v_2+2v_4}$ для некоторого $c_6(n)$.

С другой стороны, рассмотрим дискриминант многочлена $P(x)$:

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{k < l} (\alpha_k - \alpha_l)^2 .$$

Так как $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – корни многочлена $P(x)$ и $|a_n|_p \gg 1$, то для любого $1 \leq k \leq n$

$$|\alpha_k|_p \leq c_7(n)$$

для некоторой константы $c_7(n)$ ([2, с. 86]). Так как

$$|\alpha_k - \alpha_l|_p \leq \max\{ |\alpha_k|_p, |\alpha_l|_p \} \leq c_7(n),$$

то

$$\sqrt{|D(P)|_p} = |a_n^{n-1} \prod_{k < l} (\alpha_k - \alpha_l)|_p < c_8(n) |\alpha_i - \alpha_{i'}|_p |\alpha_j - \alpha_{j'}|_p < c_9(n) Q^{-v_1-v_2+2v_3+2v_4} \quad (6)$$

для некоторых констант $c_8(n)$ и $c_9(n)$.

Заметим, что из леммы об оценке дискриминанта, полученной в [1], следует, что $\sqrt{|D(P)|_p} > c(n)Q^{-n+1}$. Таким образом, из оценки (6) получаем $Q^{-v_1-v_2+2v_3+2v_4} > Q^{-n+1}$, откуда $-v_1-v_2+2v_3+2v_4 > n-1$. Учитывая, что $\sum_{i=1}^4 v_i = n+1$, имеем $v_1+v_2 < n+\frac{1}{3}$. Получаем противоречие с условием (3). Теорема доказана.

Литература

1. Пирютко Е. В., Берник В. И. // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 4. С. 50–53.
2. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск, 1967.
3. Beresnevich V. V., Bernik V. I., Kovalevskaya E. I. // Journal of number theory. 2005. Vol. 111. P. 33–36.
4. Beresnevich V. // Acta Arith. 1999. Vol. 90. P. 97–112.

A. V. PIRUTKA

MULTI-DIMENSIONAL HENSEL LEMMA AND SIMULTANEOUS APPROXIMATION OF p -ADIC NUMBERS BY p -ADIC ALGEBRAIC NUMBERS

Summary

We show that, given a pair of p -adic integers (w_1, w_2) , under some conditions on $P(w_i)$ and $P'(w_i)$, $i = 1, 2$, there exists a root α of the polynomial $P(x)$ such that α is the closest to w_1 or w_2 root and α is in \mathbf{Z}_p and not in its algebraic extension.

УДК 517.926.4+517.928.2

А. Ф. КАСАБУЦКИЙ

**О МНОЖЕСТВАХ ЛЕБЕГА ПОКАЗАТЕЛЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРОМ**

Белорусский государственный аграрный технический университет

(Поступила в редакцию 10.08.2010)

Рассмотрим однопараметрическое семейство n -мерных линейных дифференциальных систем

$$dx/dt = A(t, \mu)x, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

матрица $A(\cdot, \cdot): [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$ которого при каждом фиксированном $\mu \in \mathbb{R}$ ограничена на временной полуоси $t \geq 0$ (своей, вообще говоря, для каждого μ постоянной), и, кроме того, решения семейства (1) непрерывно зависят от параметра μ . Класс всех таких n -мерных однопараметрических семейств обозначим через S_n , а через K_n – его подкласс, состоящий из семейств

$$dx/dt = \mu A(t)x, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где $A(\cdot): [0, +\infty) \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$ – кусочно-непрерывная и ограниченная на полуоси матрица. Отождествляя матрицы коэффициентов семейств (1) или (2) с самими семействами, будем писать соответственно $A \in S_n$ или $A \in K_n$ (при этом в случае $A \in K_n$ под A нам удобнее будет понимать матрицу $A(\cdot)$, порождающую семейство (2)). Фиксируя в семействах (1) или (2) значение параметра μ , получаем линейную дифференциальную систему, которую, как и в [1], обозначаем через $\langle \mu \rangle_A$.

Следующее определение дано в [1]. Множеством Se_A экспоненциальной устойчивости семейства $A \in S_n$ называется множество всех тех значений параметра $\mu \in \mathbb{R}$, при которых система $\langle \mu \rangle_A$ этого семейства экспоненциально устойчива. В [1] доказано, в частности, что множество $M \subset \mathbb{R}$ является множеством экспоненциальной устойчивости некоторого семейства $A \in S_n$, если и только если M – F_σ -множество вещественной прямой. В работе изучается вопрос, до какой степени этот общий результат для семейств из класса S_n справедлив для существенно более узкого его подкласса K_n .

Введем одно определение. Для семейства $A \in S_n$ и числа $\lambda \in \mathbb{R}$ множеством $Se_A(\lambda)$ показателя λ этого семейства назовем множество всех тех значений параметра $\mu \in \mathbb{R}$, при которых старший показатель Ляпунова системы $\langle \mu \rangle_A$ этого семейства меньше λ . Ясно, что $Se_A = Se_A(0) = \bigcup_{\lambda < 0} Se_A(\lambda)$ и что $Se_A(\lambda_1) \subset Se_A(\lambda_2)$, если $\lambda_1 < \lambda_2$. В дальнейшем нас в основном будет интересовать случай $\lambda < 0$, в котором множество $Se_A(\lambda)$ показателя λ назовем множеством λ -экспоненциальной устойчивости.

Несколько обобщая соответствующие рассуждения из [1], для каждого семейства $A \in S_n$ определим функцию $\Lambda_A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом: $\Lambda_A(\mu)$ равна старшему показателю Ляпунова системы $\langle \mu \rangle_A$. Тогда множество Se_A экспоненциальной устойчивости и множество $Se_A(\lambda)$ показателя λ семейства $A \in S_n$ – это множества Лебега $[\Lambda_A < 0]$ и $[\Lambda_A < \lambda]$ функции Λ_A соответственно [2, с. 221]. Напомним, что функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется функцией класса $(*, G_\delta)$ [2, с. 224], если для каждого $r \in \mathbb{R}$ ее множество Лебега $[f \geq r]$ является G_δ -множеством (или, равносильно, для каждого $r \in \mathbb{R}$ ее множество Лебега $[f < r]$ является F_σ -множеством).

Л е м м а. Для каждого семейства $A \in S_n$ функция Λ_A принадлежит классу $(*, G_\delta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы равносильно утверждению: для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ прообраз $\Lambda_A^{-1}((-\infty, \lambda))$ интервала $(-\infty, \lambda)$ при отображении Λ_A , т. е. множество $Se_A(\lambda)$, является F_σ -множеством. Докажем это.

Для семейства $A \in S_n$ через $X_A(\cdot, \mu)$ обозначим нормированную в нуле (т. е. $X_A(\cdot, \mu) = E_n$, где E_n – единичная $n \times n$ -матрица) фундаментальную матрицу системы $\langle \mu \rangle_A$. Хорошо известно [3, с. 170], что старший показатель Ляпунова линейной дифференциальной системы равен характеристическому показателю нормы любой ее фундаментальной матрицы. Поэтому $\Lambda_A(\mu) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \|X_A(t; \mu)\|$. В этом равенстве, так как $\sup_{t \geq 0} \|A(t; \mu)\|$ для каждого фиксированного μ конечен, можно считать, что $t \in \mathbb{N}$ [4, с. 537].

Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ и пары $(k, m) \in \mathbb{N}^2$ определим множество $E_A(k, m; \lambda)$ условием: $E_A(k, m; \lambda) = \{\mu \in \mathbb{R} : \|X_A(k; \mu)\| \leq \exp\{(\lambda - m^{-1})k\}\}$. Непрерывная зависимость решений семейства $A \in S_n$ от параметра μ по определению означает, что при каждом фиксированном $t \geq 0$ отображение $\mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$, действующее по правилу $\mu \mapsto X_A(t; \mu)$, является непрерывным. Поэтому множество $E_A(k, m; \lambda)$ замкнуто как прообраз при отображении $\mu \mapsto X_A(k; \mu)$ замкнутого полуинтервала $(-\infty, \exp\{(\lambda - m^{-1})k\}]$. Следовательно, поскольку, как сказано выше, $\Lambda_A(\mu) = \overline{\lim}_{\mathbb{N} \ni k \rightarrow +\infty} k^{-1} \ln \|X_A(k; \mu)\|$, получаем, что $Se_A(\lambda) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \bigcap_{k=l}^{\infty} E_A(k, m; \lambda)$, отсюда и из замкнутости множеств $E_A(k, m; \lambda)$ для любых $(k, m) \in \mathbb{N}^2$ следует, что множество $Se_A(\lambda)$ является F_σ -множеством. Лемма доказана.

Частный случай доказанной леммы: для каждого семейства $A \in S_n$ при любом $\lambda < 0$ его множество $Se_A(\lambda)$ λ -экспоненциальной устойчивости является F_σ -множеством. Покажем, что это утверждение не только неумлучшаемо, но и дает полное описание класса множеств $\{Se_A(\lambda) : \lambda < 0, A \in S_n\}$. Именно, докажем, что, какие бы число $\lambda < 0$ и F_σ -множество $M \subset \mathbb{R}$ ни зафиксировать, существует семейство $A \in S_n$, для которого $Se_A(\lambda) = M$. Для доказательства сформулированного утверждения достаточно в конструкции системы из доказательства второй части теоремы 3 в [1] провести следующие изменения: матрицу $\tilde{A}(t, \mu)$ взять равной $\text{diag}[3\lambda, \lambda]$ при $t \in [T_{2k-1}, T_{2k} - 1)$, $k \in \mathbb{N}$, и равной $\text{diag}[2\lambda, 0]$ при $t \in [T_{2k}, T_{2k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, оставив все остальные построения без изменений. Те же рассуждения, что и в [1], показывают, что для семейства (1) из S_n с так определенной матрицей $A(t, \mu) \equiv \tilde{A}(t, \mu)$ имеет место равенство $Se_A(\lambda) = M$.

Таким образом, множество $M \subset \mathbb{R}$ является множеством λ -экспоненциальной устойчивости некоторого семейства из S_n тогда и только тогда, когда оно – F_σ -множество.

Как устроены множества λ -экспоненциальной устойчивости семейств из K_n ? Эти множества, помимо того, что обязаны быть F_σ -множествами, удовлетворяют еще некоторым дополнительным свойствам, которые описывает теорема 1. Перед ее формулировкой через $l(A)$ и $u(A)$ обозначим соответственно нижнее и верхнее средние значения [4, с. 534] следа матрицы $A(\cdot)$, т. е. $l(A) = \liminf_{t \rightarrow +\infty} i_A(t)$ и $u(A) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} i_A(t)$, а $i_A(t) \stackrel{\text{def}}{=} t^{-1} \int_0^t \text{Sp} A(\tau) d\tau$, $t \geq 0$.

Т е о р е м а 1. Для семейства $A \in K_n$ при любом $\lambda < 0$ его множество $Se_A(\lambda)$ λ -экспоненциальной устойчивости является F_σ -множеством. При этом $Se_A(\lambda) = \emptyset$, если $l(A)u(A) \leq 0$, а $Se_A(\lambda) \subset (n\lambda u^{-1}(A), +\infty)$ при $u(A) < 0$ и $Se_A(\lambda) \subset (-\infty, n\lambda l^{-1}(A))$ при $l(A) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $K_n \subset S_n$, то в силу леммы для любого семейства $A \in K_n$ его множество $Se_A(\lambda)$ показателя λ является F_σ -множеством и, в частности, если $\lambda < 0$, F_σ -множеством является его множество λ -экспоненциальной устойчивости.

Поскольку матрица $A(t)$, $t \geq 0$, ограничена на временной полуоси, то оба средних значения $l(A)$ и $u(A)$ ее следа конечны. Пусть $X_A(\cdot, \mu) = [x_1(\cdot, \mu), \dots, x_n(\cdot, \mu)]$. Зафиксируем $\mu \in Se_A(\lambda)$. Вследствие формулы Остроградского–Лиувилля, неравенства Адамара [5, с. 565] и того, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех $t \geq 0$, справедлива оценка $\|x_i(t; \mu)\| \leq c_i(\varepsilon) \exp\{(\lambda - \varepsilon)t\}$, $i = 1, \dots, n$, здесь $c_i(\varepsilon)$ – некоторая зависящая от i и ε постоянная, получаем неравенство

$$\exp\{\mu \int_0^t \text{Sp} A(\tau) d\tau\} \leq \prod_{i=1}^n \|x_i(t; \mu)\| \leq c(\varepsilon) \exp\{n(\lambda - \varepsilon)t\}, \quad t \geq 0,$$

где $c(\varepsilon) = c_1(\varepsilon), \dots, c_n(\varepsilon)$, или, равносильно,

$$\mu \cdot i_A(t) \leq n(\lambda - \varepsilon) + t^{-1} \ln c(\varepsilon), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Пусть $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$ и $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – какие-либо возрастающие к $+\infty$ последовательности положительных чисел, по которым соответственно $l(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} i_A(\tau_k)$ и $u(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} i_A(t_k)$. Если $l(A)u(A) \leq 0$, то $l(A) \leq 0 \leq u(A)$. Тогда, взяв в неравенстве (3) $t = \tau_k$ и устремив k к $+\infty$, получаем, что неравенство (3) не может быть выполнено при неположительном μ (при $k \rightarrow +\infty$ его левая часть стремится к неотрицательному числу, а правая – к числу отрицательному). Точно так же, взяв в неравенстве (3) $t = t_k$ и устремив k к $+\infty$, получаем, что неравенство (3) не может быть выполнено при неотрицательном μ . Следовательно, $Se_A(\lambda) = \emptyset$, если $l(A)u(A) \leq 0$.

Если же $u(A) < 0$, то по той же причине, упомянутой выше, неравенство (3) не может быть выполнено при неположительном μ , а для положительного μ , взяв $t = \tau_k$ и устремив k к $+\infty$, получаем, что для выполнимости неравенства (3) необходимо, чтобы $\mu \geq n(\lambda - \varepsilon)u^{-1}(A)$. Значит, поскольку для каждого $\mu \in Se_A(\lambda)$ найдется такое (свое для каждого μ) $\varepsilon > 0$, при котором выполнено предыдущее неравенство, то $Se_A(\lambda) \subset \bigcup_{\varepsilon > 0} (n(\lambda - \varepsilon)u^{-1}(A), +\infty) = (n\lambda / u(A), +\infty)$. Точно так же устанавливается включение $Se_A(\lambda) \subset (-\infty, n\lambda l^{-1}(A))$, если $l(A) > 0$. Впрочем, случай $l(A) > 0$ легко сводится к случаю $u(A) < 0$ заменой матрицы $A(\cdot)$ матрицей $-A(\cdot)$, как это вытекает из очевидных равенств $l(A) = -u(-A)$, $u(A) = -l(-A)$ и $Se_A(\lambda) = -Se_{-A}(\lambda)$. Теорема 1 доказана.

То, что оценки нижней при $u(A) < 0$ и верхней при $l(A) > 0$ границ множества $Se_A(\lambda)$ λ -экспоненциальной устойчивости, даваемые теоремой 1, являются неулучшаемыми на классе всех семейств $A \in K_n$, показывает пример семейства (2) с постоянной матрицей $A(t) = \text{diag}[a, \dots, a]$, где $a \neq 0$. Тогда $l(A) = u(A) = na$ и для любого $\lambda < 0$, как легко видеть, $Se_A(\lambda) = (\lambda a^{-1}, +\infty)$, если $a < 0$, и $Se_A(\lambda) = (-\infty, \lambda a^{-1})$, если $a > 0$. Что же касается борелевского типа множества $Se_A(\lambda)$, то здесь мы установим только заметно более слабый по сравнению с утверждением теоремы 1 факт: мы покажем, что множество $Se_A(\lambda)$ может быть любым открытым множеством, дополнение которого до содержащей его полуоси, ограничено. В частности, будут построены семейства (2) из K_n , для которых указанные выше оценки границ множества $Se_A(\lambda)$ не только точны, но и для которых, в отличие от предыдущего примера, не обязательно, чтобы $l(A) = u(A)$, а множество $Se_A(\lambda)$ являлось полубесконечным интервалом. Поскольку, как отмечено в конце доказательства теоремы 1, случаи $l(A) > 0$ и $u(A) < 0$ сводятся один к другому заменой матрицы $A(\cdot)$ на противоположную ей матрицу $-A(\cdot)$, то теорему 2 мы формулируем только для случая $u(A) < 0$.

Т е о р е м а 2. Для каждого натурального $n \geq 2$, какие бы числа $\lambda < 0$, $l \leq u < 0$ и открытое множество $M \subset (n\lambda u^{-1}, +\infty)$, дополнение которого до $[0, +\infty)$ ограничено, ни зафиксировать, существует такое семейство $A \in K_n$, что $Se_A(\lambda) = M$ и для матрицы коэффициентов $A(\cdot)$ которого имеют место равенства $l(A) = l$ и $u(A) = u$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Доказательство теоремы основывается на конструкции Немыцкого – Винограда [4, с. 124–126; 6, с. 47–48] в том виде, как она изложена в [7, 8].

Опишем применение [7, 8] конструкции Немыцкого–Винограда в рассматриваемой ситуации. Пусть $n = 2$. Возьмем 2×2 -матрицу $A(\cdot)$ в виде

$$A(t) = U^{-1}(t)B(t)U(t) - U^{-1}(t)dU(t)/dt, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

где $B(\cdot)$ – некоторая кусочно-непрерывная матрица, а $U(t)$, $t \geq 0$, – матрица поворота на некоторый угол $\varphi(t)$ по ходу часовой стрелки (не нарушая общности, считаем, ортонормальную систему координат Ox_1x_2 правой). Пусть функция $\varphi(t)$, $t \geq 0$, кусочно дифференцируема, а ее производная $\dot{\varphi}(t) = \omega(t)$ ограничена на полуоси и $\varphi(0) = 0$. Сделав в семействе (2) с матрицей $A(\cdot)$, задаваемой тождеством (4), линейную замену переменных $y = U(t)x$, придем, как легко убедиться, к следующему семейству:

$$dy/dt = \mu B(t)y + (1-\mu)\omega(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y \stackrel{\text{def}}{=} C_{B,\omega}(t,\mu)y, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Так как кусочно дифференцируемая матрица $U(t)$, $t \geq 0$, ортогональна при любом $t \geq 0$, и $\|dU(t)/dt\| = |\omega(t)|$, $t \geq 0$, то преобразование $y = U(t)x$ – преобразование Ляпунова [4, с. 62]. Поэтому обе системы – система $\langle \mu \rangle_A$ семейства (2) с матрицей (4) и система $\langle \mu \rangle_C$ семейства (5) – имеют равные старшие показатели Ляпунова, а значит, $Se_A(\lambda) = Se_C(\lambda)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и, в частности, для каждого $\lambda < 0$ множества λ -экспоненциальной устойчивости этих семейств совпадают.

Таким образом, построение нужной двумерной матрицы $A(\cdot)$ сводится к построению матрицы $B(\cdot)$ и функции $\omega(\cdot)$ семейства (5), что значительно проще. Матрицу $C_{B,\omega}(\cdot;\mu)$ семейства (5)

(т. е. матрицу $B(\cdot)$ и функцию $\omega(\cdot)$) мы, как и в [7, 8], будем строить на временной полуоси как кусочно-постоянную, составленную из специально подобранных матриц определяемого в следующем п. 2 доказательства трехпараметрического семейства матриц.

2. Несколько видоизменяя построения работ [7, 8], рассмотрим следующее трехпараметрическое семейство 2×2 -матриц:

$$D(\mu; p) = \begin{pmatrix} \mu a & \mu(b-c) + c \\ -\mu(b-c) - c & 0 \end{pmatrix},$$

зависящее от трех вещественных параметров a, b, c (обозначим составленный из них вектор $p = (a, b, c)^T$) и переменной $\mu \in \mathbb{R}$. Зафиксируем какие-либо a, b, c . Характеристический многочлен матрицы $D(\mu; p)$, как легко убедиться, равен $\det(D(\mu; p) - \nu E_2) = \nu^2 - a\mu\nu + (b-c)^2\mu^2 + 2c(b-c)\mu + c^2$, и значит, его корни $\nu_j(\mu; p) = 2^{-1}(a\mu + (-1)^j \sqrt{\Delta(\mu; p)})$, $j = 1, 2$, где дискриминант $\Delta(\mu; p) = (a^2 - 4(b-c)^2)\mu^2 - 8c(b-c)\mu - 4c^2$.

Зафиксируем $\lambda < 0$ и интервал (v, w) , где $v > 0$. Докажем, что для каждого отрезка $[r, s]$, содержащегося в интервале (v, w) , существует такой набор $p = p(r, s)$ параметров $a = a(r, s)$, $b = b(r, s)$, $c = c(r, s)$ в матрице $D(\mu; p)$, для которого выполнены условия: 1) $\operatorname{Re} \nu_2(\mu; p) \geq \lambda$ для всех $\mu \in [0, v] \cup [r, s]$, 2) $\operatorname{Re} \nu_2(\mu; p) < \lambda$ для всех $\mu \in (v, +\infty) \setminus [r, s]$, 3) $\sup \|p(r, s)\| \leq C(v, w; \lambda) < +\infty$, где supremum берется по всем отрезкам $[r, s] \subset (v, w)$, а $C(v, w; \lambda)$ — постоянная, зависящая только от выбора интервала (v, w) и числа $\lambda < 0$.

Положим $a = a(r, s) = 2\lambda v^{-1}$. Так как $\operatorname{Re} \nu_2(\mu; p) \geq 2^{-1}a\mu$ для всех $\mu \in \mathbb{R}$ и любого вектора p , то при таком выборе параметра a в векторе p получаем, что при всех $\mu \in [0, v]$ выполнено неравенство $\operatorname{Re} \nu_2(\mu; p) \geq 2^{-1}av \geq 2^{-1} \cdot 2\lambda v^{-1}v = \lambda$, т. е. $\operatorname{Re} \nu_2(\mu; p) \geq \lambda$ на $[0, v]$. Если $\Delta(\mu; p) < 0$ хотя бы при одном $\mu \in [r, s]$, то, поскольку $a = 2\lambda v^{-1}$ и $v < r$, неравенство $\operatorname{Re} \nu_2(\mu; p) \geq \lambda$ не может быть выполнено всюду на отрезке $[r, s]$. Значит, $\Delta(\mu; p) \geq 0$ на $[r, s]$, а тогда неравенство $\operatorname{Re} \nu_2(\mu; p) \geq \lambda$ равносильно тому, что на отрезке $[r, s]$ выполнено неравенство $P(\mu; p) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta(\mu; p) - (-a\mu + 2\lambda)^2 \geq 0$. Это неравенство не может выполняться ни на каком отрезке, содержащем отрезок $[r, s]$, так как тогда на таком отрезке $\operatorname{Re} \nu_2(\mu; p) \geq \lambda$, что противоречит условию 2). Значит, поскольку $P(\mu; p)$ — квадратный относительно μ трехчлен, получаем, что для выполнимости условий 1) и 2) необходимо и достаточно, чтобы множеством решений неравенства $P(\mu; p) \geq 0$ являлся отрезок $[r, s]$.

Неравенство $P(\mu; p) \geq 0$ с учетом того, что $a = 2\lambda v^{-1}$ равносильно неравенству $(b-c)^2\mu^2 + (2c(b-c) - 2v^{-1}\lambda^2)\mu + c^2 + \lambda^2 \leq 0$. Множеством решений этого неравенства будет отрезок $[r, s]$, если и только если $b \neq c$ и выполняется система уравнений

$$\begin{cases} -2c(b-c)^{-1} + 2v^{-1}\lambda^2(b-c)^{-2} = r + s, \\ c^2(b-c)^{-2} + \lambda^2(b-c)^{-2} = rs. \end{cases} \quad (6)$$

Обозначим $y = c(b-c)^{-1}$ и $z = \lambda^2(b-c)^{-2}$. В этих обозначениях система (6) переписется в виде

$$\begin{cases} -2y + 2v^{-1}z = r + s, \\ y^2 + z = rs, \end{cases}$$

и значит, $y^2 + vy - rs + 2^{-1}v(r+s) = 0$. Поскольку дискриминант $\delta = \delta(r, s)$ этого квадратного относительно y уравнения равен $\delta(r, s) = v^2 + 4rs - 2v(r+s) > v^2 + 4vs - 2v(r+s) = v^2 + 2v(s-r) > v^2$, то это уравнение имеет корень $y = y(r, s) = 2^{-1}(-v + \sqrt{\delta})$. Тогда $z = z(r, s) = 2^{-1}(-v^2 + v(\sqrt{\delta} + r + s)) > 2^{-1}v(r+s) > v^2$. Значит, $b = b(r, s) = \lambda(y(r, s) + 1)z^{-1/2}(r, s)$, $c = c(r, s) = \lambda y(r, s)z^{-1/2}(r, s)$. Вектор $p(r, s) = (a(r, s), b(r, s), c(r, s))^T$ построен. Выполнимость для таких векторов $p(r, s)$ при $v < r < s < w$ условия 3) очевидна. Действительно, так как $\sqrt{\delta(r, s)} < v + 2w$ и $z(r, s) > v^2$, то $|c(r, s)| < |b(r, s)| < |\lambda|(w+1)v^{-1}$. Значит, так как $a(r, s) = 2\lambda v^{-1}$, можно взять $C(v, w_0; \lambda) = \sqrt{3}|\lambda|v^{-1} \max\{2, 1+w\}$.

Ниже нам понадобится еще одно свойство построенного набора $p(r, s)$ параметров – свойство 4) если $\mu_0 > v$, $\mu_0 \notin [r, s]$ и расстояние от точки μ_0 до отрезка $[r, s]$ не меньше ρ , то существует такое, зависящее только от μ_0, v, w и ρ число $\varepsilon(\mu_0, v, w, \rho) > 0$, что

$$\operatorname{Re} v_2(\mu_0; p(r, s)) < \lambda - |\lambda| \varepsilon(\mu_0, v, w, \rho),$$

где $\varepsilon(\mu_0, v, w, \rho) = \min\{(\mu_0 - v)v^{-1}, \rho^2 v(8w^2(\mu_0 - v))^{-1}\}$. В самом деле, если $\Delta(\mu_0; p(r, s)) < 0$, то $\operatorname{Re} v_2(\mu_0; p(r, s)) = 2^{-1}a(r, s)\mu_0 = \lambda v^{-1}\mu_0 = \lambda - |\lambda|(\mu_0 - v)v^{-1}$. Пусть теперь $\Delta(\mu_0; p(r, s)) \geq 0$. Поскольку, как доказано выше, квадратный относительно μ трехчлен $P(\mu; p(r, s))$ имеет старший коэффициент, равный $-4(b(r, s) - c(r, s))^2 = -4\lambda^2 z^{-1}(r, s)$, а его корни – это r и s , то $P(\mu; p(r, s)) \equiv -4\lambda^2 z^{-1}(r, s)(\mu - r)(\mu - s)$. Из этого тождества, так как $z^{-1}(r, s) > 4^{-1}w^{-2}$ и $(\mu_0 - r)(\mu_0 - s) \geq \rho^2$, получаем $P(\mu_0; p(r, s)) < -\lambda^2 \rho^2 w^{-2}$. Но последнее неравенство вследствие определения трехчлена $P(\mu; p(r, s))$ и того, что $a(r, s) = 2\lambda v^{-1}$, равносильно неравенству $\Delta(\mu_0; p(r, s)) < (-2\lambda v^{-1}\mu_0 + 2\lambda)^2 - \lambda^2 \rho^2 w^{-2}$. Следовательно, верна оценка $\sqrt{\Delta(\mu_0; p(r, s))} < 2\lambda(1 - v^{-1}\mu_0) - \lambda^2 \rho^2 w^{-2}(4\lambda(1 - v^{-1}\mu_0))^{-1}$. Поэтому в этом случае $\operatorname{Re} v_2(\mu_0; p(r, s)) = v_2(\mu_0; p(r, s)) = 2^{-1}(a(r, s)\mu_0 + \sqrt{\Delta(\mu_0; p(r, s))}) < \lambda - |\lambda| \rho^2 v(8w^2(\mu_0 - v))^{-1} \cdot q$. Свойство 4) доказано.

3. Перейдем непосредственно к построению матрицы $A(\cdot)$ семейства (2), для которого $\operatorname{Se}_A(\lambda) = M$, а $l(A) = l$ и $u(A) = u$. Построим вначале двумерную такую систему ($A \in K_2$).

3.1. Поскольку M – открытое множество, то его дополнение $N = [0, +\infty) \setminus M$ является замкнутым множеством. Так как по предположению теоремы множество N ограничено и $\inf M \geq 2\lambda u^{-1}$, то $(0, 2\lambda u^{-1}] \subset N$ и существует такой конечный интервал (δ_0, δ_1) , где $\delta_0 \geq 2\lambda u^{-1}$, что $N_0 \stackrel{\text{def}}{=} N \cap (2\lambda u^{-1}, +\infty) \subset (\delta_0, \delta_1)$, т. е. $N = (0, 2\lambda u^{-1}] \cup N_0$. В частности, замыкание с lN_0 множества N_0 совпадает либо с N_0 , либо с $N_0 \cup \{2\lambda u^{-1}\}$ – в зависимости от того, соответственно, содержит или нет множество M интервал с левым концом $2\lambda u^{-1}$. Так как множество N_0 ограничено, у него при каждом $\varepsilon > 0$ существует содержащаяся в N_0 конечная ε -сеть. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ зафиксируем какую-либо конечную 2^{-m} -сеть множества N_0 , содержащуюся в N_0 . Пусть она содержит $q(m)$ элементов $r_1^m, \dots, r_{q(m)}^m$. Каждую точку r_i^m , $i = 1, \dots, q(m)$, покроем отрезком $O(m, i) \stackrel{\text{def}}{=} [\max\{r_i^m - 2^{-m}, \inf N_0\}, \min\{r_i^m + 2^{-m}, \sup N_0\}]$. Пусть множество $N \stackrel{\text{def}}{=} \{(m, i) : m \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, q(m)\}\}$. По построению всякая точка $\mu \in N_0$ попадает в счетное число отрезков $O(m, i)$, $(m, i) \in N$ (так как

для каждого $m \in \mathbb{N}$ по определению 2^{-m} -сети верно включение $N_0 \subset \bigcup_{i=1}^{q(m)} O(m, i)$. Напротив, ясно, что никакая точка $\mu \in M$ не может принадлежать счетному числу отрезков $O(m, i)$, $(m, i) \in N$, поскольку в противном случае длина тех из этих отрезков, которым принадлежит μ , была бы больше расстояния ρ от точки μ до множества N . Но для каждого $\rho > 0$ имеется только конечное число отрезков $O(m, i)$, $(m, i) \in N$, длины, превосходящей ρ .

Обозначим $v = 2\lambda\mu^{-1}$ и $w = 2\delta_1$. Так как $\delta_0 > v$, то интервал (v, w) содержит интервал (δ_0, δ_1) , а значит, и любой отрезок $O(m, i)$, $(m, i) \in N$. Через $a((m, i))$, $b((m, i))$, $c((m, i))$ обозначим параметры a , b , c соответственно, построенные в п. 2 доказательства для отрезка $O(m, i)$ и только что определенного интервала (v, w) (в частности, $a((m, i)) = 2\lambda v^{-1} = u$ при всех $(m, i) \in N$), а составленный из этих параметров вектор p обозначим через $p((m, i))$. Согласно п. 2 $\max \|p((m, i))\| \leq \sqrt{3} |u| \max\{1, 2^{-1} + 2\delta_1\}$. Зафиксируем какую-либо биекцию $\beta: \mathbb{N} \rightarrow N$.

3.2. Построение системы $A \in K_2$ согласно п. 1 доказательства сводим к построению соответствующих 2×2 -матрицы $B(\cdot)$ и функции $\omega(\cdot)$ семейства (5), т. е. матрицы $C_{B, \omega}(\cdot, \mu)$. Построение пары $(B(\cdot), \omega(\cdot))$ будем вести индукцией по шагам. На k -м шаге ($k \in \mathbb{N}$) эта пара будет строиться на некотором определяемом на этом шаге полуинтервале $(T_k, T_{k+1}]$ и на следующих шагах построения она на этом полуинтервале уже изменяться не будет. Через $X_\mu(\cdot, \cdot)$ обозначим матрицу Коши системы $\langle \mu \rangle_C$ строящегося семейства (5). Чтобы иметь базу индукции, сделаем нулевой шаг, на котором положим $T_0 = 0$, $T_1 = 1$, а $B(t)$ равной нулевой матрице и $\omega(t) \equiv 0$ при $t \in [0, 1]$. Пусть сделано $k-1$ шагов, т. е. матрица $B(t)$ и функция $\omega(t)$ определены при всех $t \in [0, T_k]$. Сделаем k -й шаг.

Если k – нечетное, то возьмем T_{k+1} таким, чтобы выполнялись неравенства

$$T_k / T_{k+1} < k^{-1} \quad \text{и} \quad T_{k+1}^{-1} (k+1) \ln T_{k+1} < k^{-1}, \quad (7)$$

и положим $B(t) \equiv \text{diag}[l/2, l/2]$ и $\omega(t) \equiv 0$ при всех $t \in (T_k, T_{k+1}]$. В случае нечетного k шаг k завершен.

Если k – четное, то пусть $\beta(k/2) = (m, i)$ и пусть $h_k = \min\{\|X_\mu(0, T_k)\|^{-1} : \mu \in O(m, i)\}$. Так как функция $\|X_\mu(0, T_k)\|^{-1}$ переменной μ непрерывна и положительна, то ее наименьшее значение h_k на отрезке $O(m, i)$ положительно. При $t \in (T_k, T_{k+1}]$ (величина T_{k+1} будет выбрана позже) положим

$$B(t) \equiv \begin{pmatrix} a(\beta(k/2)) & b(\beta(k/2)) \\ -b(\beta(k/2)) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \omega(t) \equiv c(\beta(k/2)), \quad (8)$$

т. е. матрица семейства (5) $C_{B, \omega}(t, \mu) \equiv D(\mu; p(\beta(k/2)))$ при $t \in [T_k, T_{k+1})$, если k – четное. Величину T_{k+1} выберем удовлетворяющей неравенствам (7) и неравенству

$$|\ln h_k| / T_{k+1} < k^{-1}. \quad (9)$$

В случае четного k шаг k завершен.

Продолжая указанные построения на всю полуось, построим пару $(B(t), \omega(t))$, а значит, согласно (4) и матрицу $A(t)$, при всех $t \geq 0$. Так как $\sup\{\|p((m, i))\| : (m, i) \in N\} < +\infty$, то матрица

$B(\cdot)$ и функция $\omega(\cdot)$ ограничены на всей полуоси, а значит, ограниченной на всей полуоси является и матрица $A(\cdot)$.

3.3. Обозначим через $Se_C(\lambda)$ множество λ -экспоненциальной устойчивости семейства (5)

с построенными матрицей $B(\cdot)$ и функцией $\omega(\cdot)$, а через $\Lambda(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \|X_\mu(t, 0)\|$ – старший показатель Ляпунова его системы $\langle \mu \rangle_C$. Докажем, что для семейства (2) с построенной матрицей $A(\cdot)$ его множество λ -экспоненциальной устойчивости совпадает с множеством M , т. е., равносильно, $Se_C(\lambda) = M$. Для этого достаточно доказать, что $\Lambda(\mu) \geq \lambda$, если $\mu \notin M$, и $\Lambda(\mu) < \lambda$, если $\mu \in M$.

Докажем, что $\Lambda(\mu) \geq \lambda$, если $\mu \notin M$, т. е. если $\mu \in (-\infty, 2\lambda u^{-1}] \cup N_0$. Так как согласно построению $SpC_{B,\omega}(t, \mu) \equiv \mu u$ при $t \in \bigcup_{p \in \mathbb{N}} [T_{2p-1}, T_{2p})$, то, как следует из неравенства Ляпунова [4, с. 72], $2\Lambda(\mu) \geq \lim_{p \rightarrow \infty} T_{2p}^{-1} (T_{2p} - T_{2p-1}) \mu u = \mu u$, а значит, $\Lambda(\mu) \geq \lambda$, если $\mu \leq 2\lambda u^{-1} = v$. Таким образом, неравенство $\Lambda(\mu) \geq \lambda$ остается доказать для $\mu \in N_0$.

Зафиксируем $\mu \in N_0$. Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$ найдется такое $i_m(\mu) \in \{1, \dots, q(m)\}$, при котором $\mu \in O(m, i_m(\mu))$. Пусть $\beta^{-1}((m, i_m(\mu))) = \{k_j : j \in \mathbb{N}\}$. Так как согласно построению при $t \in [T_{2k_j}, T_{2k_{j+1}})$, $j \in \mathbb{N}$, матрица $C_{B,\omega}(t, \mu) \equiv D(\mu; p(\beta(k_j)))$ и $v_2(\mu; p(\beta(k_j))) \geq \lambda$, то для $t \in [T_{2k_j}, T_{2k_{j+1}})$, $j \in \mathbb{N}$, и зафиксированного μ получаем:

$$\begin{aligned} \|X_\mu(t, 0)\| &\geq \|X_\mu(t, T_{2k_j})\| \cdot \|X_\mu(0, T_{2k_j})\|^{-1} = \\ &\|\exp\{D(\mu; p(\beta(k_j)))(t - T_{2k_j})\}\| \cdot \|X_\mu(0, T_{2k_j})\|^{-1} \geq \exp\{\lambda(t - T_{2k_j})\} h_{2k_j}. \end{aligned}$$

Поэтому $\Lambda(\mu) \geq \lambda T_{2k_{j+1}}^{-1} (T_{2k_{j+1}} - T_{2k_j}) + T_{2k_{j+1}}^{-1} \ln h_{2k_j}$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Но выражение в правой части последнего неравенства вследствие первого неравенства в (7) и неравенства (9) стремится к λ при $j \rightarrow \infty$. Следовательно, $\Lambda(\mu) \geq \lambda$ при $\mu \in N_0$.

Докажем теперь, что $\Lambda(\mu) < \lambda$, если $\mu \in M$. Зафиксируем $\mu_0 \in M$. Обозначим $C(\mu_0) = \sup\{C_{B,\omega}(t, \mu_0) : t \geq 0\}$. Пусть ρ – расстояние от точки μ_0 до множества N . Число тех отрезков $O(m, i)$, $(m, i) \in N$, расстояние от точки μ_0 до которых меньше $\rho/2$, конечно. Действительно, если расстояние от точки μ_0 до отрезка $O(m, i)$ меньше $\rho/2$, то $|\mu_0 - r_i^m| \leq 2^{-m-1} + \rho/2$. Значит, $2^{-m-1} \geq \rho/2$, т. е. число m должно удовлетворять неравенству $m \leq -1 - \log_2(\rho/2)$, но для каждого m отрезков $O(m, i)$ конечно число. Пусть k_0 – наибольшее из тех четных значений k , что расстояние от точки μ_0 до отрезка $O(m, i)$, где $\beta(k/2) = (m, i)$, меньше $\rho/2$. Тогда вследствие свойства 4) (см. п. 2 доказательства) найдется такое $\varepsilon > 0$, что на каждом полуинтервале $[T_k, T_{k+1})$, где четное $k > k_0$, верно неравенство $\text{Re } v_2(\mu_0; p(\beta(k/2))) < \lambda - \varepsilon$. Вследствие этого неравенства, определения (8) и оценки нормы экспоненты матрицы [4, с. 131] получаем, что при $t \in [T_k, T_{k+1}]$, где четное $k > k_0$, верно неравенство

$$\|X_{\mu_0}(t, T_k)\| = \|\exp\{D(\mu_0; p(\beta(k/2)))(t - T_k)\}\| \leq (1 + 2(t - T_k)C(\mu_0)) \exp\{(\lambda - \varepsilon)(t - T_k)\}. \quad (10)$$

Если k нечетно, то при $t \in [T_k, T_{k+1}]$ согласно построению верна оценка

$$\|X_{\mu_0}(t, T_k)\| = \|\exp\{\text{diag}[2^{-1}l\mu_0, 2^{-1}l\mu_0](t - T_k)\}\| \leq \exp\{2^{-1}l\mu_0(t - T_k)\}. \quad (11)$$

Покажем, что найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что $2^{-1}l\mu_0 < \lambda - \varepsilon_0$. Действительно, так как $\mu_0 > 2\lambda u^{-1}$, то $2^{-1}l\mu_0 < \lambda u^{-1}l \leq \lambda$. Поэтому, если обозначить $\min\{\varepsilon, \varepsilon_0\}$ через ε_1 , то из неравенств (10) и (11) вытекает, что при любом натуральном $k > k_0$ и всех $t \in [T_k, T_{k+1}]$ верно неравенство

$$\|X_{\mu_0}(t, T_k)\| \leq (1 + 2(t - T_k)C(\mu_0))\exp\{(\lambda - \varepsilon_1)(t - T_k)\}. \quad (12)$$

Тогда при $t \in [T_k, T_{k+1}]$, если $k > k_0$, вследствие оценки (12) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|X_{\mu_0}(t, 0)\| \leq & \|X_{\mu_0}(t, T_k)\| \left(\prod_{p=k-1}^{k_0} \|X_{\mu_0}(T_{p+1}, T_p)\| \right) \|X_{\mu_0}(T_{k_0}, 0)\| \exp\{(\lambda - \varepsilon_1)(t - T_{k_0})\} < \\ & (1 + 2(t - T_k))(1 + 2T_k)^k \|X_{\mu_0}(T_{k_0}, 0)\| \exp\{(\lambda - \varepsilon_1)(t - T_{k_0})\}, \end{aligned}$$

откуда в силу второго неравенства в (7) вытекает, что $\Lambda(\mu_0) \leq \lambda - \varepsilon_1$.

Для завершения доказательства теоремы в случае $n = 2$ остается проверить, что для построенной матрицы $A(\cdot)$ справедливы равенства $l(A) = l$ и $u(A) = u$. Докажем вначале, что $SpA(t) \equiv SpB(t)$ при всех $t \geq 0$, если матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ связаны равенством (4). Так как $Sp(XY) = Sp(YX)$ для любых квадратных матриц одного размера, то $Sp(U^{-1}(t)B(t)U(t)) = Sp(B(t)U^{-1}(t)U(t)) = SpB(t)$. Далее, так как матрица $U^{-1}(t)dU(t)/dt$, если $U(t)$ – унитарная матрица, является [4, с. 262] кососимметрической, то $Sp(U^{-1}(t)dU(t)/dt) = 0$. Полученные равенства и означают, что $SpA(t) \equiv SpB(t)$ при всех $t \geq 0$. Поэтому равенства $l(A) = l$ и $u(A) = u$ равносильны равенствам $l(B) = l$ и $u(B) = u$. Согласно построению при $t \in [T_k, T_{k+1})$ имеет место тождество $SpB(t) = l$, если k нечетно, и тождество $SpB(t) = u$, если k четно. Следовательно, поскольку согласно первому неравенству в (7) $T_k/T_{k+1} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, получаем $l(B) = l$ и $u(B) = u$. Теорема в случае $n = 2$ доказана.

3.4. Докажем теорему в случае $n > 2$. Этот случай легко редуцируется к уже рассмотренному случаю $n = 2$. Обозначим $u_1 = 2n^{-1}u$ и $l_1 = 2n^{-1}l$. Так как $n\lambda u^{-1} = 2\lambda u_1^{-1}$ и $l_1 \leq u_1 < 0$, то согласно п. 3.1–3.3 доказательства существует такая система $A \in K_2$, для которой $Se_A(\lambda) = M$, а $l(A) = l_1$ и $u(A) = u_1$. Кроме того, эта система такова, что существует последовательность $(T_k) \uparrow +\infty$, такая, что $T_k/T_{k+1} \downarrow 0$ при $k \uparrow \infty$ и при $t \in [T_k, T_{k+1})$ имеют место тождества $SpA(t) \equiv l_1$, если k нечетно, и $SpA(t) \equiv u_1$, если k четно.

Зададим матрицу $A_n(\cdot)$ системы $A_n \in K_n$, равенствами: $A_n(t) \equiv \text{diag}[A(t), n^{-1}l, \dots, n^{-1}l]$, если $t \in [T_k, T_{k+1})$ и k нечетно, и $A_n(t) \equiv \text{diag}[A(t), n^{-1}u, \dots, n^{-1}u]$, если $t \in [T_k, T_{k+1})$ и k четно. Очевидно, что $l(A_n) = l$ и $u(A_n) = u$.

Через e_i , $i = 1, \dots, n$, обозначим вектор из \mathbb{R}^n с 1 на i -м месте и 0 на каждом из остальных $n - 1$ мест. Пусть согласно принятым обозначениям $\langle \mu \rangle_{A_n}$ – система $\langle \mu \rangle$ семейства (2) с матрицей $A(t) \equiv A_n(t)$, $t \geq 0$. Как доказано в п. 3.1–3.3, старший показатель Ляпунова решений системы

$\langle \mu \rangle_{A_n}$, начинающихся при $t = 0$ в линейале $\text{span}\{e_1, e_2\}$, меньше λ , если и только если $\mu \in M$. Поэтому чтобы установить равенство $Se_{A_n}(\lambda) = M$, достаточно доказать, что при $\mu \in M$ показатель Ляпунова решений системы $\langle \mu \rangle_{A_n}$, начинающихся при $t = 0$ в линейале $\text{span}\{e_3, \dots, e_n\}$, меньше λ . В силу определения матрицы $A_n(\cdot)$ все ненулевые такие решения имеют один и тот же показатель Ляпунова, равный $\mu n^{-1}u$. Так как $\mu \in M$, то $\mu > n\lambda u^{-1}$, но это неравенство равносильно неравенству $\mu n^{-1}u < \lambda$, которое и требовалось установить. Теорема 2 доказана.

Автор выражает благодарность Е. А. Барабанову за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Барабанов Е. А., Касабуцкий А. Ф. // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 4. С. 67–75.
2. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.; Л., 1937.
3. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.
4. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
5. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М., 1989.
6. Леонов Г. А. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М.; Ижевск, 2006.
7. Барабанов Е. А. // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1067–1084.
8. Барабанов Е. А. // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 5. С. 611–625.

A. F. KASABUTSKY

LEBESQUE SETS OF THE EXPONENTIAL STABILITY INDEX OF LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH THE PARAMETER

Summary

For every number $\lambda < 0$, the set of the λ -exponential stability of the linear differential systems family with the real parameter-multiplier under derivative is called the set of all parameter values, at which the corresponding family systems have the major Lyapunov exponent lower than λ . We obtain the necessary conditions, which are satisfied by sets of λ -exponential stability. The unimprovability of some these conditions is established.

УДК 517.977

В. Е. ХАРТОВСКИЙ

**К ВОПРОСУ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ
НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА**

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

(Поступила в редакцию 06.01.2010)

Для линейной автономной дифференциально-разностной системы нейтрального типа рассматривается задача выбора управления, обеспечивающего нулевое решение в течение любого заданного времени. Представленные результаты ориентированы, прежде всего, на упомянутые системы (или начальные функции), не обладающие свойством полной управляемости.

1. Постановка основной задачи. Рассмотрим линейную автономную дифференциально-разностную систему нейтрального типа, которую назовем системой Σ :

$$\dot{x}(t) = D\dot{x}(t-h) + Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t) + B_1u(t-h), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$x(t) = \eta(t), t \in H = [-h, 0], \quad u(t) \equiv 0, t < 0, \quad (2)$$

где x – n -вектор-столбец решения уравнения (1), u – r -вектор-столбец кусочно-непрерывного управляющего воздействия (управление), D, A, A_1, B, B_1 – постоянные матрицы соответствующих размеров, $0 < h$ – постоянное запаздывание. Функцию η в (2) будем называть начальной функцией и считать, что $\eta \in \mathbf{D}(H, \mathbb{R}^n)$, где $\mathbf{D}(H, \mathbb{R}^n)$ – пространство абсолютно непрерывных функций, определенных на отрезке H со значениями в пространстве n -векторов-столбцов \mathbb{R}^n . Под решением уравнения (1), проходящим через η , понимаем [1, с. 36] абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, $t \in [-h, +\infty)$, совпадающую с $\eta(t)$, $t \in H$, и такую, что уравнение (1) удовлетворяется почти всюду. Зная начальные условия (2) и функцию $u(t)$, $t \in [0, h]$, из (1) можно найти [1, с. 36] абсолютно непрерывное решение $x(t)$, $t \in [0, h]$, положив $x(0) = \eta(0)$. Применяя указанный процесс к отрезкам $[kh, (k+1)h]$, $k = 0, 1, \dots$, получим единственное решение уравнения (1) на $[-h, +\infty)$.

О п р е д е л е н и е 1. Начальную функцию η в (2) назовем управляемой, если для любого натурального числа θ (включая $\theta = +\infty$) существуют момент времени $t_1 > 0$ и управление $u(t)$, $t \in [0, t_1 + \theta h]$, обеспечивающее

$$x(t) \equiv 0, t \in [t_1, t_1 + \theta h]. \quad (3)$$

Если управляемы все начальные функции $\eta \in \mathbf{D}(H, \mathbb{R}^n)$, то систему Σ назовем управляемой.

О п р е д е л е н и е 2. Начальную функцию η в (2) назовем полностью управляемой, если существуют момент времени $t_1 > 0$ и управление $u(t)$, $t \in [0, t_1 - h]$, $(u(t) \equiv 0, t > t_1 - h)$, обеспечивающее $D\dot{x}(t) + A_1x(t) = 0, t \in [t_1 - h, t_1]$, $x(t_1) = 0$. Если полностью управляемы все начальные функции $\eta \in \mathbf{D}(H, \mathbb{R}^n)$, то систему Σ назовем полностью управляемой.

З а м е ч а н и е 1. а) Из определения 2 следует, что для полностью управляемой начальной функции η выбором управления $u(t), t \in [0, t_1 - h]$, можно обеспечить $x(t) \equiv 0, t > t_1$ при $u(t) \equiv 0, t > t_1 - h$.

б) Для системы Σ , у которой одна из матриц B или B_1 равна нулю, свойства управляемости и полной управляемости эквивалентны.

Очевидно, что полностью управляемая система является управляемой. Однако обратное утверждение в общем случае не верно [2], т. е. класс управляемых систем шире класса полностью управляемых систем. Цель работы – получить критерий управляемости системы Σ и схему построения управления, реализующего (3).

Данная статья является продолжением исследований автора, начатых в [3, 4] для систем запаздывающего типа. Динамика систем нейтрального типа существенно отличается от систем запаздывающего типа, поэтому просто перенести методы [3, 4] на системы нейтрального типа не представляется возможным. В частности, для управляемых систем нейтрального типа спектральное условие полной управляемости (см. п. 2, формула (4)) может нарушаться в бесконечном множестве точек.

З а м е ч а н и е 2. В [2] управляемые системы назывались «полностью управляемые по состоянию», в настоящей работе для краткости будем придерживаться термина, оговоренного в определении 1.

2. Предварительные результаты по задаче полной управляемости. Впервые спектральный критерий полной управляемости для системы запаздывающего типа был получен в работе [2], для системы Σ при $B_1 = 0$ – в [5], более общие результаты для алгебро-дифференциальных систем – в [6]. Поскольку в цитированных выше работах не приводилось решение задачи полной управляемости для системы Σ в случае ненулевых матриц B и B_1 , а для решения центральной задачи настоящего исследования это необходимо, установим ряд утверждений. Обозначим $W(\lambda) = \lambda(E - De^{-\lambda h}) - (A + A_1e^{-\lambda h})$ характеристическую матрицу уравнения (1) (E – единичная матрица соответствующего размера), $\tilde{B}(\lambda) = B + B_1e^{-\lambda h}$, \mathbb{K} – множество комплексных чисел.

Т е о р е м а 1. Для того чтобы система Σ была полностью управляема, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялось два условия

$$1. \text{rank}[W(\lambda), \tilde{B}(\lambda)] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad (4)$$

$$2. \text{rank } B_D = \text{rank}[B_D, D^n], \quad (5)$$

где матрица $B_D = [(DB + B_1), D(DB + B_1), \dots, D^{n-1}(DB + B_1)]$.

Системе Σ поставим в соответствие систему Σ_1 :

$$\dot{x}(t) = Q\dot{x}(t-h) + Cx(t) + C_1x(t-h), \quad t \geq 0, \quad x(t) = \varphi(t), \quad t \in H, \quad (6)$$

$$y(t) = Gx(t) + G_1x(t-h), \quad t \geq 0, \quad (7)$$

где $Q = D'$, $C = A'$, $C_1 = A_1'$, $G = B'$, $G_1 = B_1'$, символ «штрих» (') обозначает операцию транспонирования, начальная функция $\varphi \in \mathbf{D}(H, \mathbb{R}^n)$, y – выходной сигнал, доступный наблюдению (выход).

Системы Σ и Σ_1 будем называть двойственными.

О п р е д е л е н и е 3. [5] Систему Σ_1 назовем конструктивно идентифицируемой в направлении $q \in \mathbf{D}(H, \mathbb{R}^n)$, если найдутся момент времени $t_1 > 0$ и кусочно-непрерывная r -вектор-функция $v(t), t \in [h, t_1]$, для которой выполняется соотношение

$$\int_h^{t_1} v'(t)y(t)dt = (q'(0) - q'(-h)Q)x(t_1) + \int_{t_1}^{t_1+h} q'(t_1-t)(Q\dot{x}(t-h) + C_1x(t-h))dt, \quad (8)$$

каково бы ни было решение системы Σ_1 , порожденное начальной функцией φ . Если конструктивная идентифицируемость системы Σ_1 возможна в любом направлении $\varphi \in \mathbf{D}(H, \mathbb{R}^n)$, то систему Σ_1 назовем полностью конструктивно идентифицируемой.

З а м е ч а н и е 3. Рассмотрим соотношение (8). Обозначим $q^*(t) = q(-t), t \in [0, h]$. Выберем функции q так, чтобы соответствующие функции q^* образовывали базис обобщенного собственного пространства P^* формально сопряженного с (6) уравнения в смысле [1, с. 361]. Тогда из (8) и теоремы 12.10.2 [1, с. 362] получим непрерывную операцию восстановления проекции решения уравнения (6) на обобщенное собственное пространство P этого уравнения (предполагаем, что пространства P и P^* отвечают выбранному конечному спектральному набору уравнения (6)). Например, если базис P^* состоит из одной функции, а Φ – базис P , то будем иметь

$$x^P(t_1 + s) = \Phi(s) \int_h^{t_1} v'(t) y(t) dt, s \in H, \text{ где } x^P \in P.$$

Имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. Если система Σ_1 конструктивно идентифицируема в направлении $q \in \mathbf{D}(H, \mathbb{R}^n)$, то начальная функция $\eta = q$ системы Σ полностью управляема управлением $u(t) = -v(t_1 - t), t \in [0, t_1 - h]$. Если начальная функция η системы Σ полностью управляема управлением $u(t), t \in [0, t_1 - h]$, то система Σ_1 конструктивно идентифицируема в направлении $q = \eta$ и функция $v(t) = -u(t_1 - t), t \in [h, t_1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теорем 1 и 2 проводится по схемам доказательства аналогичных утверждений статьи [5].

Из теоремы 2 следует, что условия (4) и (5) являются необходимыми и достаточными для полной конструктивной идентифицируемости системы Σ_1 .

3. Вспомогательные результаты. Пусть выполняется (3) при любом достаточно большом θ . Тогда $Bu(t) + B_1u(t - h) = 0, t \in (t_1 + h, t_1 + \theta h]$. Последнее равенство перепишем в виде

$$Bu^{k+1}(t) + B_1u^k(t) = 0, \quad (9)$$

где обозначено $u^k(t) = u(t + kh)$, а соотношение (9) рассматривается при $k = \overline{0, \theta - 2}$, и $t \in (t_1, t_1 + h]$.

Рассмотрим последовательность векторов $g^k, k = \overline{1, \theta - 1}$, определяемых уравнением

$$Bg^{k+1} + B_1g^k = 0, \quad k = \overline{0, \theta - 2}, \quad (10)$$

при заданном векторе g^0 . Пусть $T = [{}^1g^0, \dots, {}^d g^0]$ – матрица, составленная из максимального числа линейно независимых векторов ${}^i g^0$, для которых уравнение (10) имеет решение $g^k, k = \overline{1, \theta - 1}$, при любом θ (алгоритм построения матрицы T приведен в п. 5). Тогда $g^k = Tc^k$ при некотором векторе c^k [3, 4]. Функция u является кусочно-непрерывной, поэтому справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 1. Пусть начальная функция η системы Σ управляема, а управление $u(t), t \in [0, t_1 + \theta h]$, обеспечивает (3). Тогда существуют такие кусочно-непрерывные d -вектор-функции $f^k(t), t \in (t_1 + kh, t_1 + (k + 1)h], k = \overline{0, \theta - 1}$, что

$$u^k(t) = Tf^k(t + kh), t \in (t_1, t_1 + h], k = \overline{0, \theta - 1}, \quad (11)$$

где $u^k(t) = u(t + kh), t \in (t_1, t_1 + h]$.

Рассмотрим систему Σ_1 .

Л е м м а 2. Пусть для некоторой функции $q \in \mathbf{D}(H, \mathbb{R}^n)$ существуют кусочно-непрерывные r -вектор-функция $\tilde{u}(t), t \in [0, t_1 - h]$, и d -вектор-функция $f(t), t \in (t_1 - h, t_1]$, такие, что выполняется соотношение

$$q'(0)[x(t_1) - Qx(t_1 - h)] + \int_{t_1 - h}^{t_1} [q'(t_1 - h - t)C_1 + \dot{q}'(t_1 - h - t)Q]x(t)dt + \int_h^{t_1} \tilde{u}'(t_1 - t)y(t)dt + \int_0^h f'(t_1 - t)T'Gx(t)dt = 0, \quad (12)$$

каково бы ни было решение $x(t), t \in [0, t_1]$, системы Σ_1 , порожденное начальной функцией φ . Тогда начальная функция $\eta = q$ системы Σ управляема.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В системе Σ сделаем замену $t = t_1 - \tau$, $x(t_1 - \tau) = z(\tau)$, в результате получим систему в обратном времени

$$\begin{aligned} \dot{z}'(\tau) &= \dot{z}'(\tau + h)Q - z'(\tau)C - z'(\tau + h)C_1 - u'(t_1 - \tau)G - u'(t_1 - \tau - h)G_1, \tau \leq t_1, \\ z(\tau) &= \eta(t_1 - \tau), \tau \in [t_1, t_1 + h]. \end{aligned} \quad (13)$$

Решение системы – абсолютно непрерывная функция, поэтому можно [7, с. 465] воспользоваться формулой интегрирования по частям

$$\begin{aligned} z'(t_1)[x(t_1) - Qx(t_1 - h)] - z'(0)[x(0) - Qx(-h)] &= \int_0^{t_1} \dot{z}'(t)[x(t) - Qx(t - h)]dt + \\ &+ \int_0^{t_1} z'(t)[\dot{x}(t) - Q\dot{x}(t - h)]dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Заменив производные, стоящие в правой части формулы (14), согласно (6) и (13), и выполнив ряд преобразований, приведем (14) к виду

$$\begin{aligned} z'(0)[\varphi(0) - Q\varphi(-h)] + \int_{-h}^0 [z'(t + h)C_1 - \dot{z}'(t + h)Q]\varphi(t)dt = \\ \eta'(0)[x(t_1) - Qx(t_1 - h)] + \int_{t_1 - h}^{t_1} [\eta'(t_1 - t - h)C_1 + \dot{\eta}'(t_1 - t - h)Q]x(t)dt + \\ \int_h^{t_1} u'(t_1 - t)y(t)dt + \int_0^h u'(t_1 - t)Gx(t)dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Положив в (15)

$$u(t) = \tilde{u}(t), t \in [0, t_1 - h], \quad u(t) = Tf(t), t \in (t_1 - h, t_1], \quad (16)$$

в силу (12) при $\eta = q$ получим, что левая часть равенства (15) равна нулю. Это справедливо при любом $\varphi \in \mathbf{D}(H, \mathbb{R}^n)$, значит, $z(0) = 0$, $z'(t)C_1 - \dot{z}'(t)Q = 0, t \in [0, h]$. Переходя от системы (13) к системе Σ в прямом времени, заключаем, что при управлении (16) $x(t_1) = 0, D\dot{x}(t) + A_1x(t) = 0, t \in [t_1 - h, t_1]$. Взяв $u^0(t) = u(t) = Tf(t), t \in (t_1 - h, t_1]$, из уравнения (9) при $k = 0, \overline{0} - 1$ найдем $u^k(t), t \in (t_1 - h, t_1], k = \overline{1, \overline{0}}$. Тогда при $u(t) = u^k(t - kh), t \in (t_1 + (k - 1)h, t_1 + kh], k = \overline{0, \overline{0}}$, будет выполняться (3). Лемма доказана.

4. Критерий управляемости.

Теорема 3. Для того чтобы система Σ была управляема, необходимо и достаточно одно-временного выполнения двух условий:

$$1. \text{rank}[W(\lambda), \tilde{B}(\lambda), BT] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}; \quad (17)$$

$$2. \text{rank}[B_D, BT] = \text{rank}[B_D, BT, D^n]. \quad (18)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть управление $u(t), t \in [0, t_1 + \theta h]$, обеспечивает (3). Докажем необходимость первого условия теоремы. Предположим, что условие (17) нарушается при некотором $\lambda^0 \in \mathbb{K}$. Выберем вектор $p \in \mathbb{R}^n$ как решение алгебраической системы $p'W(\lambda^0) = 0, p'\tilde{B}(\lambda^0) = 0, p'BT = 0$. Умножим обе части равенства (1) на $p'e^{-\lambda^0 t}$ и проинтегрируем на отрезке $[0, t_1 + \theta h]$, при этом учтем (9) и (11). После несложных преобразований (включающих в себя интегрирование по частям) получим

$$p'(\eta(0) - D\eta(-h)) + \int_{-h}^0 p'e^{-\lambda^0(t+h)}(D\lambda^0 + A_1)\eta(t)dt = 0. \quad (19)$$

Таким образом, управляемыми могут быть лишь те начальные функции, которые удовлетворяют соотношению (19).

Перейдем к доказательству необходимости условия (18). Если система Σ управляема, то управляемы все непрерывно дифференцируемые начальные функции η в (2). Пусть управление $u(t), t \in [0, t_1 + \theta h]$, обеспечивает (3) в случае произвольной непрерывно дифференцируемой начальной функции η в (2).

Будем считать, что $t_1 = sh, s$ – натуральное число. Обозначим $p^i = \dot{x}(ih + 0) - \dot{x}(ih - 0), v^i = u(ih + 0) - u(ih - 0), i = \overline{0, (s + \theta)h}$, соответственно скачки производной $\dot{x}(t)$ решения уравнения (1) и управления $u(t)$ в точках $t = ih$. Из (1), (2) и непрерывности решения $x(t)$ следует, что

$$p^{k+1} = Dp^k + Bv^{k+1} + B_1v^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (20)$$

$$p^0 = Bv^0 + D\dot{\eta}(-h + 0) + A\eta(0) + A_1\eta(-h) - \dot{\eta}(-0). \quad (21)$$

Для решения системы (20) справедлива формула

$$p^{j+1} = D^{j+1}p^0 + \sum_{k=0}^j D^{j-k}(Bv^{k+1} + B_1v^k), \quad j = 0, 1, \dots \quad (22)$$

Заменяя в (22) p^0 согласно (21), приведем (22) к виду

$$p^{j+1} = D^{j+1}(D\dot{\eta}(-h + 0) + A\eta(0) + A_1\eta(-h) - \dot{\eta}(-0)) + \sum_{k=0}^j D^{j-k}(DB + B_1)v^k + Bv^{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (23)$$

Из (3) следуют равенства $p^{s+1+j} = 0, j = \overline{0, \theta - 2}$. Рассмотрим первое из них (при $j = 0$). Учтем, что в силу леммы 1, $v^{s+1} = T\tilde{v}^{s+1}, \tilde{v}^{s+1} = f^1((s+1)h + 0) - f^0((s+1)h - 0)$. Поэтому из (23) получим

$$D^{s+1}(D\dot{\eta}(-h + 0) + A\eta(0) + A_1\eta(-h) - \dot{\eta}(-0)) + \sum_{k=0}^s D^{s-k}(DB + B_1)v^k + BT\tilde{v}^{s+1} = 0. \quad (24)$$

Из (24), теоремы Кронекера–Капелли и произвольности в выборе функции η следует (18).

Достаточность. Считаем, что условия (17) и (18) выполнены. Зафиксируем произвольную начальную функцию $\eta \in \mathbf{D}(H, \mathbb{R}^n)$ и построим для системы Σ_1 соотношение (12) при $q = \eta$. Этим, в силу леммы 2, будет доказана управляемость системы Σ .

Рассмотрим вспомогательную систему, состоящую из уравнения (6) и выхода

$$\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} G \\ T'G \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} x(t-h) = \begin{bmatrix} y(t) \\ T'Gx(t) \end{bmatrix}, \quad t \geq 0. \quad (25)$$

Используя теорему Гамильтона–Кэли, непосредственной проверкой убеждаемся, что в силу (17), (18), система (6), (25) полностью конструктивно идентифицируема (см. теоремы 1, 2), поэтому существует функция $V(t), t \in [h, t_1]$ такая, что

$$\int_h^{t_1} V'(t) \tilde{y}(t) dt = (q'(0) - q'(-h)Q)x(t_1) + \int_h^{t_1} q'(t_1 - t)[Qx(t-h) + C_1x(t-h)] dt. \quad (26)$$

В равенстве (26) будем по-прежнему считать $t_1 = sh$, s – натуральное число. Применив формулу интегрирования по частям, перепишем (26) в виде

$$\int_h^{t_1} V'(t) \tilde{y}(t) dt = q'(0)[x(t_1) - Qx(t_1 - h)] + \int_{t_1-h}^{t_1} [q'(t_1 - h - t)C_1 + q'(t_1 - h - t)Q]x(t) dt. \quad (27)$$

Левую часть (27) в силу (25) представим так:

$$\int_h^{t_1} V'(t) \tilde{y}(t) dt = \int_h^{t_1} \bar{v}'(t) y(t) dt + \int_h^{t_1} \tilde{v}'(t) T'Gx(t) dt, \quad (28)$$

где $V = \text{col}[\bar{v}, \tilde{v}]$, \bar{v} – r -вектор-функция, \tilde{v} – d -вектор-функция.

Выход (7) на каждом из отрезков $[h, (k+1)h]$, $k = \overline{1, s-1}$ запишем следующим образом:

$$y(t - ih) = Gx(t - ih) + G_1x(t - (i+1)h), \quad t \in [kh, (k+1)h], \quad i = \overline{0, k-1}, \quad k = \overline{1, s-1}. \quad (29)$$

Положим $T_0 = T$ и рассмотрим последовательность матриц T_k , $k = \overline{0, s-1}$, удовлетворяющих уравнению $T'_{k+1}G + T'_kG_1 = 0$, $k = \overline{0, s-2}$. Заметим, что столбцы матрицы T_k представляют собой линейные комбинации столбцов матрицы T , т. е. существуют матрицы M_k , что $T_k = TM_k$.

Умножим каждое i -е равенство в (29) на матрицу T'_i слева, сложим полученные соотношения и учтем, что $T'_{k-1}G_1 = -T'_kG$, в итоге придем к формуле

$$T'_0Gx(t) = \sum_{i=0}^{k-1} T'_i y(t - ih) + T'_kGx(t - kh), \quad t \in [kh, (k+1)h], \quad k = \overline{1, s-1}. \quad (30)$$

Далее, используя (30), преобразуем второй интеграл в правой части (28):

$$\begin{aligned} \int_h^{t_1} \tilde{v}'(t) T'Gx(t) dt &= \sum_{k=1}^{s-1} \int_{kh}^{(k+1)h} \tilde{v}'(t) T'Gx(t) dt = \\ &= \sum_{k=1}^{s-1} \int_{kh}^{(k+1)h} \tilde{v}'(t) \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} T'_i y(t - ih) \right\} dt + \sum_{k=1}^{s-1} \int_{kh}^{(k+1)h} \tilde{v}'(t) T'_kGx(t - kh) dt. \end{aligned} \quad (31)$$

Перепишем первое и второе слагаемые в правой части (31) следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{s-1} \int_{kh}^{(k+1)h} \tilde{v}'(t) \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} T'_i y(t-ih) \right\} dt = \sum_{k=1}^{s-1} \int_{kh}^{(k+1)h} \left\{ \sum_{i=0}^{s-(k+1)} \tilde{v}'(t+ih) T'_i \right\} y(t) dt, \quad (32)$$

$$\sum_{k=1}^{s-1} \int_{kh}^{(k+1)h} \tilde{v}'(t) T'_k Gx(t-kh) dt = \int_0^h \left\{ \sum_{k=1}^{s-1} \tilde{v}'(t+kh) M'_k \right\} T' Gx(t) dt. \quad (33)$$

Определим функции

$$\hat{v}'(t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{s-2} \tilde{v}'(t+ih) T'_i, & t \in (h, 2h], \\ \dots & \dots \\ \tilde{v}'(t) T'_0, & t \in ((s-1)h, sh], \end{cases} \quad \rho'(t) = \sum_{i=1}^{s-1} \tilde{v}'(t+ih) M'_i, \quad t \in [0, h]. \quad (34)$$

Заменяв подынтегральные функции в правых частях в (32) и (33) согласно (34), запишем соотношение (31) так:

$$\int_h^{t_1} \tilde{v}'(t) T' Gx(t) dt = \int_h^{t_1} \hat{v}'(t) y(t) dt + \int_0^h \rho'(t) T' Gx(t) dt. \quad (35)$$

Теперь (28) в силу (35) можно переписать в виде

$$\int_h^{t_1} V(t) \tilde{y}(t) dt = \int_h^{t_1} (\bar{v}'(t) + \hat{v}'(t)) y(t) dt + \int_0^h \rho'(t) T' Gx(t) dt. \quad (36)$$

Поменяв левую часть в (27) по формуле (36) и положив

$$\tilde{u}(t) = -(\bar{v}'(t_1 - t) + \hat{v}'(t_1 - t)), \quad t \in [0, t_1 - h], \quad f(t) = -\rho(t_1 - t), \quad t \in (t_1 - h, t_1], \quad (37)$$

получим соотношение (12). Согласно лемме 2, система Σ управляема. Теорема доказана.

5. Алгоритм построения матрицы T . Поскольку основные результаты формулируются с использованием матрицы T , приведем алгоритм ее построения, обоснование которого дано в работах [3, 4].

Шаг 1. Полагаем $k = 1$, $B^{(0)} = B$, $B_1^{(0)} = B_1$, $n_0 = 0$, $M^{(0)} = E$, E – единичная $r \times r$ -матрица.

Шаг 2. Вычисляем матрицу $L^{(k)}$ как фундаментальную матрицу решений системы $\tilde{g}' B^{(k-1)} = 0$ относительно n -вектора \tilde{g} (если $L^{(1)} = 0$, то $T = M^{(0)}$). Пусть n_k – число строк матрицы $L^{(k)}$. Если $n_k = n_{k-1}$ или $L^{(k)} B_1^{(k-1)} = 0$, то полагаем $T = \prod_{i=0}^{k-1} M^{(i)}$. Если $n_k \neq n_{k-1}$, то переходим к шагу 3.

Шаг 3. Вычисляем матрицу $M^{(k)}$ как фундаментальную матрицу решений системы $L^{(k)} B_1^{(k-1)} \bar{g} = 0$ относительно вектора \bar{g} . Полагаем $B^{(k)} = B^{(k-1)} M^{(k)}$, $B_1^{(k)} = B_1^{(k-1)} M^{(k)}$, увеличиваем k на единицу и переходим к шагу 2.

Замечание 4. В качестве первых n_{k-1} строк матрицы $L^{(k)}$ можно брать строки матрицы $L^{(k-1)}$. Также отметим, что матрица T будет построена при некотором $k \leq n-1$.

Заключение. Пример. В работе получен критерий управляемости линейной автономной дифференциально-разностной системы. Доказательство теоремы 3 носит конструктивный ха-

рактер и позволяет для конкретной начальной функции, в том числе и не обладающей свойством полной управляемости, построить управление, обеспечивающее (3). Проиллюстрируем это числовым примером.

Пусть задана система Σ с матрицами $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $h = 1$, и начальной функцией $\eta(t) = \text{col}[t, 1]$, $t \in [-1, 0]$. Такая система в силу теоремы 1 не является полностью управляемой. Кроме того, начальная функция также не является полностью управляемой. Действительно, рассмотрим соответствующую двойственную систему Σ_1 . Начальная функция $\varphi(t) = \text{col}[-c, c]$, $t \in [-1, 0]$, (c – произвольная постоянная) такой системы порождает нулевой выход [8]. Поэтому система Σ_1 не может быть конструктивно идентифицируема в направлении $\eta(t) = \text{col}[t, 1]$, $t \in [-1, 0]$. Таким образом, для системы Σ не применимы методы решения задачи полной управляемости.

Проверим выполнение условий теоремы 3. В данном случае $T = \text{col}[1, 0]$ и система является управляемой. Вычислим управление, обеспечивающее (3), например, для $\theta = 3$. Вначале строим разрешающую операцию (27) для системы (6), (25). Имеем $t_1 = 3$, $V = \text{col}[\bar{v}, \tilde{v}]$, $\bar{v}(t) = \text{col}[0, 1]$, $t \in [1, 2]$, $\bar{v}(t) = \text{col}[0, 0]$, $t \in (2, 3]$, $\tilde{v}(t) = -1$, $t \in [1, 2]$, $\tilde{v}(t) = 1 - t$, $t \in (2, 3]$. Далее, согласно (34), ($T_i = T$, $M_i = 1$, $i = 1, 2$), вычисляем $\hat{v}'(t) = \begin{cases} [\tilde{v}(t) + \tilde{v}(t+1), 0], & t \in (1, 2], \\ [\tilde{v}(t), 0], & t \in (2, 3], \end{cases}$ и $\rho(t) = \tilde{v}(t+1) + \tilde{v}(t+2)$, $t \in [0, 1]$. Используя сначала формулу (37), а затем (16), получаем $u(t) = \text{col}[-t+2, 0]$, $t \in [0, 1]$, $u(t) = \text{col}[4-t, -1]$, $t \in (1, 2]$, $u(t) = \text{col}[1, 0](5-t)$, $t \in (2, 3]$. Положив $u^0(t) = u(t)$, $t \in (2, 3]$, из уравнения (9) находим u^i , $i = 1, 2, 3$. Итогом будет управление $u(t) = \text{col}[1, 0](6-t)$, $t \in (3, 4]$, $u(t) = \text{col}[1, 0](7-t)$, $t \in (4, 5]$, $u(t) = \text{col}[1, 0](8-t)$, $t \in (5, 6]$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x(t) \equiv 0$, $t \in [3, 6]$. Не составляет труда продолжить построение управления, продолжающего «удерживать» решение системы в нуле. Однако, если положить $u(t) \equiv 0$, $t > 6$, то $x(t) \neq 0$, $t > 6$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Ф09М-177).

Литература

1. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.
2. Марченко В. М. // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236, № 5. С. 1083–1086.
3. Хартовский В. Е. // Автоматика и телемех. 2008. № 7. С. 47–58.
4. Хартовский В. Е. // Изв. РАН. Т и СУ. 2009. № 6. С. 3–11.
5. Метельский А. В., Минюк С. А. // Изв. РАН. Т и СУ. 2006. № 5. С. 15–23.
6. Минюк С. А., Метельский А. В. // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 3. С. 303–317.
7. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. II. 4-е изд. М., 1991.
8. Хартовский В. Е. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2006. № 2. С. 33–38.

V. E. KHARTOVSKII

CONTROL OF LINEAR SYSTEMS OF NEUTRAL TYPE

Summary

A constructive approach to the control of not completely controllable linear autonomous differential systems with delay of neutral type is proposed. The problem of choice of control providing the zero solution of the system during any set time is solved.

УДК 517. 958: 534. 286-16

В. Т. ЕРОФЕЕНКО

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХСТОРОННИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН НА УПРУГОМ ЭКРАНЕ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 18.02.2010)

В математической физике значительное место занимают задачи дифракции волн различной природы на материальных структурах со специальной геометрией [1]. Выделяют класс задач дифракции высокочастотных электромагнитных полей [2], задачи распространения упругих волн [3], задачи распространения и дифракции акустических волн на препятствиях из различных материалов [4]. Такие задачи формируются в виде краевых задач для трехмерного пространства с граничными условиями сопряжения на поверхностях материальных тел, расположенных в пространстве. Задачи состоят в определении полей, проникших в тела, и полей, отраженных от тел. Как правило, задачи сопряжения формулируются для уравнений одного типа для определения полей, как внутри тел, так и во внешних областях.

В последнее время актуальными являются как с математической, так и с прикладной точек зрения задачи сопряжения для уравнений различных типов. В работе рассматривается трехобластная краевая задача для слоя: в полупространствах по обе стороны слоя поля подчиняются скалярному уравнению Гельмгольца для давлений в среде, а поля в слое – векторному уравнению Ламе для перемещений среды. Слои или многослойные структуры рассматриваются как экраны, препятствующие распространению звуковых волн [5–7], и используются для защиты информации, передаваемой акустическими техническими устройствами. При решении краевых задач для слоистых структур применяется матричный метод, в котором последовательно удовлетворяются граничные условия сопряжения на плоских границах раздела материальных слоев. В работе в случае монохроматических акустических плоских волн, распространяющихся в произвольном направлении, получены двухсторонние нелокальные граничные условия, связывающие акустические поля по обе стороны упругого слоя. Условия получены для произвольных комплекснозначных коэффициентов Ламе и комплексной плотности среды, что используется для создания звукопоглощающих экранов [8]. Моделирование граничных условий основывалось на методах работы [9]. Разработанные граничные условия могут быть использованы для моделирования процессов проникновения акустических волн в тонкостенные упругие оболочки произвольной формы.

1. Постановка задачи. В пространстве \mathbb{R}^3 размещен плоский слой $D(0 < z < \Delta)$ упругого материала. Полупространства $D_1(z < 0)$ и $D_2(z > \Delta)$ заполнены средами, в которых распространяются звуковые волны, колеблющиеся с круговой частотой звука ω . Под воздействием звукового поля слой D совершает упругие колебания, а его деформация определяется полем перемещений $\vec{u}(x, y, z)$, которое удовлетворяет уравнениям Ламе [3]

$$\mu_c \Delta \vec{u} + (\lambda_c + \mu_c) \text{grad div } \vec{u} + \omega^2 \rho_c \vec{u} = 0 \text{ в } D, \quad (1)$$

где μ_c, λ_c – коэффициенты Ламе слоя, ρ_c – плотность материала слоя D , \vec{u} – комплексная амплитуда поля перемещений.

Реальное поле перемещений определяется формулой $\vec{U} = \text{Re}(\vec{u}e^{-i\omega t})$.

Полупространства D_j заполнены средами, характеризующимися плотностями среды ρ_j и скоростями звука в среде a_j . В области D_1 расположен источник акустического поля, которое определяется комплексной амплитудой давления $v_0(x, y, z)$ в точке $(x, y, z) \in D_1$ [10, с. 119]; v'_1 – отраженное акустическое поле в D_1 ; v_2 – акустическое поле, прошедшее в область D_2 , $v_1 = v_0 + v'_1$ – суммарное поле в D_1 . Реальное поле давлений определяется выражением $P_j = \text{Re}(v_j e^{-i\omega t})$, $j = 1, 2$.

На граничных плоскостях $\Gamma_1(z=0)$, $\Gamma_2(z=\Delta)$ слоя D выполнены граничные условия взаимодействия звуковых волн с упругим слоем D [1, с. 90]:

$$(\vec{u}, \vec{n})|_{\Gamma_j} = p_j \frac{\partial v_j}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma_j}, \quad T(\vec{u})|_{\Gamma_j} = -v_j \vec{n}|_{\Gamma_j}, \quad (2)$$

где $\vec{n} = \vec{e}_z$ – единичная нормаль к слою D , $p_j = \frac{1}{\omega^2 \rho_j}$.

$$T(\vec{u}) = 2\mu_c \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} + \lambda_c \vec{e}_z \text{div} \vec{u} + \mu_c [\vec{e}_z, \text{rot} \vec{u}], \quad (3)$$

$T(\vec{u})$ – оператор напряжений на плоскостях $z = \text{const}$.

Сформируем трехобластную краевую задачу для областей D_1, D, D_2 .

Краевая задача 1. Для заданного первичного звукового поля $v_0 \in C^2(\bar{D}_1 \setminus \bar{D}_0)$ (\bar{D}_0 – область источника поля) требуется определить звуковые поля $v'_1 \in C^2(D_1) \cap C^1(\bar{D}_1)$, $v_2 \in C^2(D_2) \cap C^1(\bar{D}_2)$, которые удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\Delta v'_1 + (k^{(1)})^2 v'_1 = 0 \quad \text{в } D_1, \quad \Delta v_2 + (k^{(2)})^2 v_2 = 0 \quad \text{в } D_2, \quad (4)$$

требуется также определить поле перемещений $\vec{u} \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$, которое удовлетворяет уравнению (1), граничным условиям (2) и условиям излучения на бесконечности.

В дальнейшем рассмотрим случай плоского первичного поля вида

$$v_0 = A \exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y - v^{(1)} z), \quad z < 0, \quad (5)$$

где α_1, α_2 – заданные произвольные числа, $v^{(1)} = \sqrt{\lambda^2 - (k^{(1)})^2}$,

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg v^{(1)} < \frac{\pi}{2}, \quad \lambda = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad 0 \leq \arg \lambda < \pi,$$

A – заданная амплитуда $k^{(1)} = \frac{\omega}{a_1}$.

В этом случае область источника \bar{D}_0 удалена на бесконечность.

Отраженное поле определяется выражением

$$v'_1 = A_1 \exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y + v^{(1)} z), \quad z < 0, \quad (6)$$

а прошедшее в область D_2 поле

$$v_2 = A_2 \exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y - v^{(2)} z), \quad z > \Delta, \quad (7)$$

где

$$v^{(2)} = \sqrt{\lambda^2 - (k^{(2)})^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg v^{(2)} < \frac{\pi}{2}, \quad k^{(2)} = \frac{\omega}{a_2}.$$

Функции (6), (7) удовлетворяют уравнениям (4).

В этом случае поле перемещений в области D также имеет структуру плоского поля:

$$\vec{u} = (A\vec{e}_x + B\vec{e}_y + C\vec{e}_z) \exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y \pm v z), \quad 0 < z < \Delta, \quad (8)$$

где A, B, C – постоянные, не зависящие от x, y, z .

Структура полей (5) – (8) позволяет сформулировать краевую задачу 1 в виде двухобластной краевой задачи для областей D_1 и D_2 с нелокальными граничными условиями, связывающими звуковые поля по обе стороны слоя D .

Краевая задача 2. Для заданного первичного поля v_0 требуется определить звуковые поля $v'_1 \in C^2(D_1) \cap C^1(\bar{D}_1)$, $v_2 \in C^2(D_2) \cap C^1(\bar{D}_2)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\Delta v'_1 + (k^{(1)})^2 v'_1 = 0 \text{ в } D_1, \quad \Delta v_2 + (k^{(2)})^2 v_2 = 0 \text{ в } D_2, \quad (9)$$

граничным условиям

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial \vec{n}}(M_1) \right|_{\Gamma_1} = a_{11} v_1(M_1) \Big|_{\Gamma_1} + a_{12} v_2(M_2) \Big|_{\Gamma_2}, \quad M_1 = (x, y, 0), \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial v_2}{\partial \vec{n}}(M_2) \right|_{\Gamma_2} = a_{21} v_1(M_1) \Big|_{\Gamma_1} + a_{22} v_2(M_2) \Big|_{\Gamma_2}, \quad M_2 = (x, y, \Delta),$$

и условиям излучения на бесконечности.

В работе построены модели граничных условий (10) и решена задача (9), (10) для конкретного источника звукового поля.

2. Плоские базисные волны в упругой среде. Найдем вихревые плоские решения уравнения (1) вида (8). Такие решения удовлетворяют системе уравнений [2, с. 15]

$$\Delta \vec{u} + k_2^2 \vec{u} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (11)$$

где

$$k_2 = \omega \sqrt{\frac{\rho_c}{\mu_c}}, \quad 0 \leq \arg k_2 < \pi.$$

Четыре линейно независимых плоских решения системы (11) представим в виде [2, с. 9]:

$$\vec{u}_1^{(\mp)} = \vec{W}^{(\mp 1)}(\vec{r}; \alpha_1, \alpha_2; k_2) \equiv i\vec{V}_1 X_2(\mp z), \quad (12)$$

$$\vec{u}_2^{(\mp)} = \vec{W}^{(\mp 2)}(\vec{r}; \alpha_1, \alpha_2; k_2) \equiv \frac{1}{k_2} (\mp i v_2^c \vec{V}_2 + \lambda \vec{e}_z) X_2(\mp z), \quad (13)$$

где

$$\vec{V}_1 = \frac{1}{\lambda} (\alpha_2 \vec{e}_x - \alpha_1 \vec{e}_y), \quad \vec{V}_2 = \frac{1}{\lambda} (\alpha_1 \vec{e}_x + \alpha_2 \vec{e}_y), \quad (14)$$

$$v_2^c = \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg v_2^c < \frac{\pi}{2}, \quad \lambda = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad 0 \leq \arg \lambda < \pi,$$

$$X_j(\mp z) = \exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y \mp v_j^c z), \quad j = 1, 2. \quad (15)$$

Построим потенциальные плоские решения уравнения (1) вида

$$\vec{u} = \text{grad } w, \quad (16)$$

где функция w удовлетворяет скалярному уравнению

$$\Delta w + k_1^2 w = 0, \quad (17)$$

где

$$k_1 = \omega \sqrt{\frac{\rho_c}{\lambda_c + 2\mu_c}}, \quad 0 \leq \arg k_1 < \pi.$$

Рассмотрим плоские решения уравнения (17) вида

$$W = \frac{1}{\lambda} X_1(\mp z), \quad (18)$$

где $X_1(\mp z)$ определяется формулой (15),

$$v_1^c = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg v_1^c < \frac{\pi}{2}.$$

Подставляя (18) в (16), найдем решение уравнения (1)

$$\vec{u}_3^{(\mp)} = \left(i\vec{V}_2 \mp \frac{v_1^c}{\lambda} \vec{e}_z \right) X_1(\mp z), \quad (19)$$

В результате имеем полный набор плоских полей (12), (13), (19):

$$\begin{aligned} \vec{u}_1^{(\mp)} &= i\vec{V}_1 X_2(\mp z), \\ \vec{u}_2^{(\mp)} &= (\mp f_2 \vec{V}_2 + g_2 \vec{e}_z) X_2(\mp z), \\ \vec{u}_3^{(\mp)} &= (f_3 \vec{V}_2 \mp g_3 \vec{e}_z) X_1(\mp z), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$f_2 = \frac{iv_2^c}{k_2}, \quad g_2 = \frac{\lambda}{k_2}, \quad f_3 = i, \quad g_3 = \frac{v_1^c}{\lambda}.$$

Укажем, что для вектор-функций (20) выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{u}_1^{(\mp)} &= k_2 \vec{u}_2^{(\mp)}, \quad \text{rot } \vec{u}_2^{(\mp)} = k_2 \vec{u}_1^{(\mp)}, \\ \text{div } \vec{u}_1^{(\mp)} &= 0, \quad \text{div } \vec{u}_2^{(\mp)} = 0, \quad \text{rot } \vec{u}_3^{(\mp)} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

которые используются для аналитических преобразований.

3. Действие оператора напряжений. Поле перемещений \vec{u} в упругой среде, характеризуемой параметрами λ_c, μ_c, ρ_c , вызывает напряжения. Поле напряжений в среде на плоскостях $\Gamma(z = \text{const})$ определяется оператором (3), действующим на перемещения \vec{u} . Вычислим поля напряжений, вызываемых базисными плоскими полями (20).

Л е м м а 1. Действие оператора (3) на вектор-функции (20) определяется формулами

$$\begin{aligned} T(\vec{u}_1^{(\mp)}) &= \mp a_1 \vec{V}_1 X_2(\mp z), \\ T(\vec{u}_2^{(\mp)}) &= (b_2 \vec{V}_2 \mp c_2 \vec{e}_z) X_2(\mp z), \\ T(\vec{u}_3^{(\mp)}) &= (\mp b_3 \vec{V}_2 + c_3 \vec{e}_z) X_1(\mp z), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$a_1 = i\mu_c v_2^c, \quad b_2 = i\mu_c \left(2 \frac{\lambda^2}{k_2} - k_2 \right), \quad c_2 = 2 \frac{\mu_c \lambda v_2^c}{k_2},$$

$$b_3 = 2i\mu_c v_1^c, \quad c_3 = \frac{1}{\lambda} (2\mu_c \lambda^2 - k_1^2 l_c), \quad l_c = 2\mu_c + \lambda_c.$$

Доказательство. Имеют место следующие векторные произведения для векторов (14):

$$[\vec{e}_z, \vec{V}_1] = \vec{V}_2, \quad [\vec{e}_z, \vec{V}_2] = -\vec{V}_1, \quad [\vec{V}_1, \vec{V}_2] = \vec{e}_z. \quad (23)$$

Применим оператор (3) к первой вектор-функции (20), используя формулы (21), тогда с учетом (23) получим

$$T(\vec{u}_1^{(\mp)}) = 2\mu_c \frac{\partial \vec{u}_1^{(\mp)}}{\partial z} + \mu_c k_2 [\vec{e}_z, \vec{u}_2^{(\mp)}] =$$

$$(2i\mu_c (\mp v_2^c) \vec{V}_1 + \mu_c k_2 (\mp f_2) [\vec{e}_z, \vec{V}_2]) X_2(\mp z) = \mp i\mu_c v_2^c \vec{V}_1 X_2(\mp z).$$

Аналогично выводятся вторая и третья формулы (22), с учетом соотношений (15)–(18) для поля $\vec{u}_3^{(\mp)}$.

4. Перемещения и напряжения в плоском упругом слое. Рассмотрим плоский слой $D(0 < z < \Delta)$, заполненный упругой средой. Слой ограничен плоскостями $\Gamma_1(z=0), \Gamma_2(z=\Delta)$. Будем предполагать, что слой D подвергается деформациям вида (20). Изучим деформацию общего вида, как линейную комбинацию полей (20):

$$\vec{u} = \sum_{s=1}^3 (A_s \vec{u}_s^{(+)} + B_s \vec{u}_s^{(-)}), \quad (24)$$

где A_s, B_s – комплексные постоянные.

Преобразуем поле (24), учитывая формулы (20). Получим

$$\vec{u} = i(A_1 X_2(+z) + B_1 X_2(-z)) \vec{V}_1 +$$

$$(A_2 f_2 X_2(+z) + A_3 f_3 X_1(+z) - B_2 f_2 X_2(-z) + B_3 f_3 X_1(-z)) \vec{V}_2 +$$

$$(A_2 g_2 X_2(+z) + A_3 g_3 X_1(+z) + B_2 g_2 X_2(-z) - B_3 g_3 X_1(-z)) \vec{e}_z. \quad (25)$$

Представим вектор перемещений (24) в базисе $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{e}_z$ в виде

$$\vec{u} = u_1(z) \vec{V}_1 + u_2(z) \vec{V}_2 + u_3(z) \vec{e}_z \quad (26)$$

и вычислим перемещения на плоскости $\Gamma_1(z=0)$:

$$\vec{u}|_{\Gamma_1} = u_1(0) \vec{V}_1 + u_2(0) \vec{V}_2 + u_3(0) \vec{e}_z = u_1^{(1)} \vec{V}_1 + u_2^{(1)} \vec{V}_2 + u_3^{(1)} \vec{e}_z, \quad (27)$$

где $u_s(0) = u_s^{(1)}$ – предельные значения компонент вектора перемещений на плоскости Γ_1 .

Приравняем векторы (25), (27) на плоскости $\Gamma_1(z=0)$, получим систему алгебраических уравнений

$$i(A_1 + B_1) \Phi = u_1^{(1)},$$

$$(A_2 f_2 + A_3 f_3 - B_2 f_2 + B_3 f_3) \Phi = u_2^{(1)}, \quad (28)$$

$$(A_2 g_2 + A_3 g_3 + B_2 g_2 - B_3 g_3) \Phi = u_3^{(1)},$$

где $\Phi = \exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y)$.

Вычислим напряжения на плоскостях $z = \text{const}$ в слое D , которые возникают в результате перемещений (24). Для этого применим оператор (3) к векторному полю (24), используя формулы (22):

$$\begin{aligned} T(\vec{u}) = \sum_{s=1}^3 (A_s T(\vec{u}_s^{(+)} + B_s T(\vec{u}_s^{(-)})) = a_1 (A_1 X_2(z) - B_1 X_2(-z)) \vec{V}_1 + \\ (A_2 b_2 X_2(z) + A_3 b_3 X_1(z) + B_2 b_2 X_2(-z) - B_3 b_3 X_1(-z)) \vec{V}_2 + \\ (A_2 c_2 X_2(z) + A_3 c_3 X_1(z) - B_2 c_2 X_2(-z) + B_3 c_3 X_1(-z)) \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (29)$$

Представим вектор напряжений $T(\vec{u})$ в виде

$$T(\vec{u}) = T_1(z) \vec{V}_1 + T_2(z) \vec{V}_2 + T_3(z) \vec{e}_z \quad (30)$$

и вычислим напряжения на плоскости $\Gamma_1(z=0)$:

$$T(\vec{u})|_{\Gamma_1} = T_1(0) \vec{V}_1 + T_2(0) \vec{V}_2 + T_3(0) \vec{e}_z = T_1^{(1)} \vec{V}_1 + T_2^{(1)} \vec{V}_2 + T_3^{(1)} \vec{e}_z, \quad (31)$$

где $T_s(0) = T_s^{(1)}$ – предельные значения компонент вектора напряжений на плоскости Γ_1 .

Приравняем векторы (29), (31) на плоскости $\Gamma_1(z=0)$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} a_1 (A_1 - B_1) \Phi = T_1^{(1)}, \\ (A_2 b_2 + A_3 b_3 + B_2 b_2 - B_3 b_3) \Phi = T_2^{(1)}, \\ (A_2 c_2 + A_3 c_3 - B_2 c_2 + B_3 c_3) \Phi = T_3^{(1)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Разрешим систему уравнений (28), (32), определив коэффициенты A_s, B_s .

$$A_1 = \left(-iu_1^{(1)} + \frac{1}{a_1} T_1^{(1)} \right) K, \quad B_1 = \left(-iu_1^{(1)} - \frac{1}{a_1} T_1^{(1)} \right) K, \quad (33)$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{d_1} (c_3 u_2^{(1)} - f_3 T_3^{(1)}) + \frac{1}{d_2} (b_3 u_3^{(1)} - g_3 T_2^{(1)}) \right] K,$$

$$B_2 = \left[\frac{1}{d_2} (b_3 u_3^{(1)} - g_3 T_2^{(1)}) - \frac{1}{d_1} (c_3 u_2^{(1)} - f_3 T_3^{(1)}) \right] K, \quad (34)$$

$$A_3 = \left[\frac{1}{d_1} (f_2 T_3^{(1)} - c_2 u_2^{(1)}) + \frac{1}{d_2} (g_2 T_2^{(1)} - b_2 u_3^{(1)}) \right] K,$$

$$B_3 = \left[\frac{1}{d_1} (f_2 T_3^{(1)} - c_2 u_2^{(1)}) - \frac{1}{d_2} (g_2 T_2^{(1)} - b_2 u_3^{(1)}) \right] K,$$

где

$$K = \frac{1}{2\Phi}, \quad d_1 = -il_c \frac{v_2^c k_1^2}{k_2 \lambda}, \quad d_2 = i\mu_c \frac{k_2 v_1^c}{\lambda}.$$

Подставляя коэффициенты (33) в (24), (29), получим выражения полей перемещений и напряжений в слое D через предельные значения $u_s^{(1)}, T_s^{(1)}$.

5. Переходная матрица для плоских упругих колебаний в слое. При звуковом воздействии в материале слоя D возникают перемещения и напряжения, выраженные через плоские волны (20) и плоские напряжения (22). Используя этот факт, найдем соотношения, связывающие перемещения и напряжения на плоскостях Γ_1 и Γ_2 .

Вычислим перемещения на плоскости $\Gamma_2(z = \Delta)$ слоя D . Приравнивая выражения (25), (26) при $z = \Delta$, получим равенства для коэффициентов при векторах $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{e}_z$:

$$u_1^{(2)} = i(A_1 F_2^{(+)} + B_1 F_2^{(-)}) \Phi; \quad (35)$$

$$u_2^{(2)} = (A_2 f_2 F_2^{(+)} + A_3 f_3 F_1^{(+)} - B_2 f_2 F_2^{(-)} + B_3 f_3 F_1^{(-)}) \Phi, \quad (36)$$

$$u_3^{(2)} = (A_2 g_2 F_2^{(+)} + A_3 g_3 F_1^{(+)} + B_2 g_2 F_2^{(-)} - B_3 g_3 F_1^{(-)}) \Phi,$$

где $u_s^{(2)} = u_s(\Delta)$, $F_j^{(\mp)} = \exp(\mp v_j^c \Delta)$, $s = 1, 2, 3$.

Далее вычислим напряжения на плоскости $\Gamma_2(z = \Delta)$. Приравнивая выражения (29), (30) при $z = \Delta$, получим

$$T_1^{(2)} = a_1(A_1 F_2^{(+)} - B_1 F_2^{(-)}) \Phi, \quad (37)$$

$$T_2^{(2)} = (A_2 b_2 F_2^{(+)} + A_3 b_3 F_1^{(+)} + B_2 b_2 F_2^{(-)} - B_3 b_3 F_1^{(-)}) \Phi, \quad (38)$$

$$T_3^{(2)} = (A_2 c_2 F_2^{(+)} + A_3 c_3 F_1^{(+)} - B_2 c_2 F_2^{(-)} + B_3 c_3 F_1^{(-)}) \Phi,$$

где $T_s^{(2)} = T_s(\Delta)$, $s = 1, 2, 3$.

Теорема 1. *Предельные значения компонент перемещений и напряжений на плоскостях Γ_1 и Γ_2 в базисе $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{e}_z$ плоских упругих полей (26), распространяющихся в упругом слое D и удовлетворяющих уравнениям Ламе (1), связаны нелокальными граничными условиями сопряжения*

$$u_1^{(2)}(M_2) = b_{11} u_1^{(1)}(M_1) + b_{12} T_1^{(1)}(M_1), \quad (39)$$

$$T_1^{(2)}(M_2) = b_{21} u_1^{(1)}(M_1) + b_{22} T_1^{(1)}(M_1),$$

где

$$b_{11} = C_2, \quad b_{12} = \frac{S_2}{\mu_c v_2^c}, \quad b_{21} = \mu_c v_2^c S_2, \quad b_{22} = C_2,$$

$$S_2 = \text{sh}(v_2^c \Delta), \quad C_2 = \text{ch}(v_2^c \Delta); \quad v_2^c = \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg v_2^c < \frac{\pi}{2},$$

$$u_2^{(2)}(M_2) = W_{11} u_2^{(1)}(M_1) + W_{12} T_2^{(1)}(M_1) + W_{13} u_3^{(1)}(M_1) + W_{14} T_3^{(1)}(M_1), \quad (40)$$

$$T_2^{(2)}(M_2) = W_{21} u_2^{(1)}(M_1) + W_{22} T_2^{(1)}(M_1) + W_{23} u_3^{(1)}(M_1) + W_{24} T_3^{(1)}(M_1),$$

$$u_3^{(2)}(M_2) = W_{31} u_2^{(1)}(M_1) + W_{32} T_2^{(1)}(M_1) + W_{33} u_3^{(1)}(M_1) + W_{34} T_3^{(1)}(M_1),$$

$$T_3^{(2)}(M_2) = W_{41} u_2^{(1)}(M_1) + W_{42} T_2^{(1)}(M_1) + W_{43} u_3^{(1)}(M_1) + W_{44} T_3^{(1)}(M_1),$$

где

$$W_{11} = q_1(c_3 f_2 C_2 - c_2 f_3 C_1), \quad W_{12} = q_2(g_2 f_3 S_1 - g_3 f_2 S_2),$$

$$W_{13} = q_2(b_3 f_2 S_2 - b_2 f_3 S_1), \quad W_{14} = q_1 f_2 f_3 (C_1 - C_2),$$

$$W_{21} = q_1(c_3 b_2 S_2 - c_2 b_3 S_1), \quad W_{22} = q_2(g_2 b_3 C_1 - g_3 b_2 C_2),$$

$$W_{23} = q_2 b_2 b_3 (C_2 - C_1), \quad W_{24} = q_1(f_2 b_3 S_1 - f_3 b_2 S_2), \quad (41)$$

$$W_{31} = q_1(c_3 g_2 S_2 - c_2 g_3 S_1), \quad W_{32} = q_2 g_2 g_3 (C_1 - C_2),$$

$$W_{33} = q_2(b_3 g_2 C_2 - b_2 g_3 C_1), \quad W_{34} = q_1(f_2 g_3 S_1 - f_3 g_2 S_2),$$

$$W_{41} = q_1 c_2 c_3 (C_2 - C_1), \quad W_{42} = q_2(g_2 c_3 S_1 - g_3 c_2 S_2),$$

$$W_{43} = q_2(b_3 c_2 S_2 - b_2 c_3 S_1), \quad W_{44} = q_1(f_2 c_3 C_1 - f_3 c_2 C_2),$$

$$q_j = \frac{1}{d_j}, \quad q_1 = \frac{ik_2\lambda}{l_c v_2^c k_1^2}, \quad q_2 = -\frac{i\lambda}{\mu_c k_2 v_1^c}, \quad v_1^c = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2},$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg v_1^c < \frac{\pi}{2}, \quad \lambda = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad 0 \leq \arg \lambda < \pi,$$

α_1, α_2 – произвольные комплексные величины, $M_1 = (x, y, 0)$, $M_2 = (x, y, \Delta)$.

Матрица $\widehat{W} = \{w_{nm}\}$, $(n, m = 1, 2, 3, 4)$ называется передаточной матрицей для упругого одно-родного слоя D .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим коэффициенты (33) в условия (35), (37) и получим связу-ющие соотношения (39). Далее, подставляя коэффициенты (34) в условия (36), (38), получим по-сле упрощающих преобразований представление компонент перемещений и напряжений на пло-скости Γ_2 через значения на плоскости Γ_1 .

6. Граничные условия для акустических полей. Построим модель граничных условий (10), связывающих акустические поля по обе стороны упругого слоя D . Коэффициенты граничных условий выразим через матричные элементы (41).

Т е о р е м а 2. При воздействии плоской акустической волны (5) на упругий слой D , переме-щения среды в котором подчиняются уравнениям Ламе (1), на плоскостях слоя Γ_1 и Γ_2 с уче-том (2) возникают акустические давления v_1 и v_2 , связанные нелокальными граничными усло-виями сопряжения

$$p_1 \frac{\partial v_1}{\partial \bar{n}}(M_1) = F_{11}v_1(M_1) + F_{12}v_2(M_2),$$

$$p_2 \frac{\partial v_2}{\partial \bar{n}}(M_2) = F_{21}v_1(M_1) + F_{22}v_2(M_2),$$
(42)

где

$$F_{11} = \frac{W_{44}W_{21} - W_{24}W_{41}}{W_{43}W_{21} - W_{23}W_{41}}, \quad F_{12} = \frac{W_{21}}{W_{23}W_{41} - W_{43}W_{21}},$$

$$F_{21} = [W_{44}(W_{33}W_{21} - W_{23}W_{31}) + W_{43}(W_{24}W_{31} - W_{34}W_{21}) +$$

$$W_{41}(W_{34}W_{23} - W_{33}W_{24})] / (W_{43}W_{21} - W_{23}W_{41}),$$

$$F_{22} = \frac{W_{33}W_{21} - W_{23}W_{31}}{W_{23}W_{41} - W_{43}W_{21}}, \quad M_1 = (x, y, 0), \quad M_2 = (x, y, \Delta).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из граничных условий (2) на плоскости Γ_1 получим

$$(\bar{u}, \bar{e}_z)|_{z=0} = u_3^{(1)} = p_1 \frac{\partial v_1}{\partial \bar{n}}, \quad T(\bar{u})|_{z=0} = T_1^{(1)}\bar{V}_1 + T_2^{(1)}\bar{V}_2 + T_3^{(1)}\bar{e}_z = -v_1\bar{e}_z.$$

Следует

$$T_1^{(1)}(M_1) = 0, \quad T_2^{(1)}(M_1) = 0, \quad T_3^{(1)}(M_1) = -v_1(M_1),$$

$$u_3^{(1)}(M_1) = p_1 \frac{\partial v_1(M_1)}{\partial \bar{n}}.$$
(43)

Аналогично из граничных условий (2) на плоскости Γ_2 получим

$$T_1^{(2)}(M_2) = 0, \quad T_2^{(2)}(M_2) = 0, \quad T_3^{(2)}(M_2) = -v_2(M_2),$$

$$u_3^{(2)}(M_2) = p_2 \frac{\partial v_2(M_2)}{\partial \bar{n}}.$$
(44)

Подставим (43), (44) во второе, третье и четвертое соотношения (40):

$$0 = W_{21}u_2^{(1)} + W_{23}p_1 \frac{\partial v_1}{\partial \bar{n}} - W_{24}v_1,$$
(45)

$$p_2 \frac{\partial v_2}{\partial \bar{n}} = W_{31} u_2^{(1)} + W_{33} p_1 \frac{\partial v_1}{\partial \bar{n}} - W_{34} v_1, \quad (46)$$

$$-v_2 = W_{41} u_2^{(1)} + W_{43} p_1 \frac{\partial v_1}{\partial \bar{n}} - W_{44} v_1. \quad (47)$$

Выражая $u_2^{(1)}$ из равенства (45) и подставляя в (46), (47), получим требуемые граничные соотношения (42). Теорема доказана.

На основании разработанных граничных условий (42) элементарно решается краевая задача 2. Подставляя поля (5)–(7) в условия (10), вычислим коэффициенты отражения и прохождения

$$A_1 = \frac{A}{d} [a_{12} a_{21} - (a_{11} + v^{(1)})(a_{22} + v^{(2)})], \quad A_2 = \frac{2v^{(1)} a_{21}}{F_0 d} A,$$

где

$$F_0 = \exp(-v^{(2)} \Delta), \quad d = (a_{11} - v^{(1)})(a_{22} + v^{(2)}) - a_{12} a_{21}, \quad a_{js} = \frac{F_{js}}{p_j}.$$

В заключение введем вектор-столбец $\vec{U}_j = (u_2^{(j)}, T_2^{(j)}, u_3^{(j)}, T_3^{(j)})^T$ и соотношения (40) запишем в матричном виде:

$$\vec{U}_2 = \widehat{W} \vec{U}_1. \quad (48)$$

Рассмотрим упругий экран, состоящий из N плоских слоев, тогда соотношение (48) для слоистого экрана примет вид $\vec{U}_2 = \widehat{W}^{\text{сл}} \vec{U}_1$, где $\widehat{W}^{\text{сл}} = \widehat{W}^{(N)} \widehat{W}^{(N-1)} \dots \widehat{W}^{(1)}$, $\widehat{W}^{(s)}$ – передаточная матрица для s -го упругого слоя.

Исследование проводилось при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Ф08-026).

Литература

1. Смагин С. И. Интегральные уравнения задач дифракции. Владивосток, 1995.
2. Ерофеев В. Т., Козловская И. С. Математические модели в электродинамике. Ч. 2. Минск, 2008.
3. Амензаде Ю. А. Теория упругости. М., 1976.
4. Иванов В. П. Задачи дифракции волн в низкочастотной акустике. М., 2004.
5. Молотков Л. А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л., 1984.
6. Каниболотский М. А., Уржумцев Ю. С. Оптимальное проектирование слоистых конструкций. Новосибирск, 1989.
7. Игнатович В. К. // Акустич. журнал. 1992. Т. 38. Вып.1. С. 70–78.
8. Викторова Р. Н., Тютюкин В. В. // Акустич. журнал. 1998. Т. 44, № 3. С. 331–336.
9. Аполлонский С. М., Ерофеев В. Т. Эквивалентные граничные условия в электродинамике. Спб., 1998.
10. Ерофеев В. Т., Козловская И. С. Основы математического моделирования. Минск, 2002.
11. Кюркчан А. Г., Смирнова Н. И. // Акустич. журнал. 2007. Т. 53, № 4. С. 490–500.

V. T. EROFEENKO

MODELING OF TWO-SIDED BOUNDARY CONDITIONS FOR ACOUSTIC WAVES ON THE ELASTIC SCREEN

Summary

Nonlocal boundary conditions linking monochromatic plane sound fields on two sides of the elastic layer are obtained in analytical form. The field of perturbations in the elastic medium of the layer satisfies the Lamé equation with arbitrary complex-valued Lamé coefficients and complex density of material. The boundary conditions simulate the penetration of acoustic waves through the elastic screen.

ФІЗІКА

УДК 539.12:530.145

В. А. ПЛЕТЮХОВ¹, В. И. СТРАЖЕВ², П. П. АНДРУСЕВИЧ³

**ВНУТРЕННЯЯ СИММЕТРИЯ ВОСЬМИКОМПОНЕНТНОГО
ДИРАКОВСКОГО ПОЛЯ**

¹*Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина*

²*Белорусский государственный университет*

(Поступила в редакцию 2.04.2010)

Наличие внутренней симметрии у релятивистских волновых уравнений (РВУ) указывает на существование у описываемых ими элементарных частиц дополнительных (помимо спина) внутренних степеней свободы и тем самым расширяет возможности применения теории РВУ. Поэтому установление и изучение указанной симметрии представляет собой важную задачу для физики микромира.

Под преобразованиями Q внутренней симметрии лагранжевой формулировки РВУ первого порядка, записанного в матричной форме

$$(\Gamma_{\mu} \partial_{\mu} + m)\Psi = 0 \quad (1)$$

(Ψ – многокомпонентная, вообще говоря, комплексная волновая функция, Γ_{μ} – квадратные матрицы, m – массовый параметр), понимаются преобразования

$$\Psi'(x_{\mu}) = Q\Psi(x_{\mu}), \quad (2)$$

удовлетворяющие требованиям:

1) матрица Q коммутирует со всеми матрицами Γ_{μ} , т. е.

$$[Q, \Gamma_{\mu}] = 0; \quad (3)$$

2) для матрицы Q выполняется вытекающее из требования релятивистской инвариантности лагранжиана условие

$$Q^{+}\eta Q = \eta, \quad (4)$$

где η – матрица билинейной инвариантной формы $\psi^{+}\eta\psi$, знак «+» означает эрмитовское сопряжение. Для бесконечно малых однопараметрических преобразований

$$Q = I + \omega J \quad (5)$$

(ω – параметр, J – генератор) условие (4) принимает вид:

$$(\omega J)^{+}\eta = -\eta\omega J. \quad (6)$$

Объектом нашего внимания будет система, состоящая из двух уравнений Дирака, или 8-компонентное дираковское поле. Обычно с такой системой связывают (изотопическую) симметрию

$SU(2)$, от которой применительно к паре протон-нейтрон и берет начало понятие внутренней симметрии РВУ. Однако, используя подход, развитый в работе [1], можно показать, что на самом деле здесь присутствует более широкая группа симметрии, включающая $SU(2)$ как подгруппу.

Детальное исследование внутренней симметрии лагранжевой формулировки 8-компонентного дираковского поля, как на классическом, так и на квантовом уровнях, на основе вышеуказанного подхода является целью настоящей работы.

1. Рассмотрим систему из двух уравнений Дирака

$$\begin{cases} (\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_1 = 0, \\ (\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_2 = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где ψ_1, ψ_2 – биспиноры первого ранга, γ_μ – матрицы 4×4 , имеющие вид:

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} & -i\sigma_i \\ i\sigma_i & \end{pmatrix}, \gamma_4 = \begin{pmatrix} I_2 & \\ & -I_2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Преобразуем систему (7). Возьмем от нее комплексное сопряжение и, учитывая, что $\gamma_1^* = -\gamma_1$, $\gamma_2^* = \gamma_2$, $\gamma_3^* = -\gamma_3$, $\gamma_4^* = \gamma_4$, $\partial_i^* = \partial_i$, $\partial_4^* = -\partial_4$, получим уравнения:

$$\begin{cases} (-\gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2 - \gamma_3 \partial_3 - \gamma_4 \partial_4 + m)\psi_1^* = 0, \\ (-\gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2 - \gamma_3 \partial_3 - \gamma_4 \partial_4 + m)\psi_2^* = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Объединяя (9) с исходными уравнениями (7), приходим к системе уравнений, которая может быть записана в универсальной матричной форме (1). Для такой системы матрицы Γ_μ 16×16 и матрица η в базе

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_1^*, \psi_2^*) \text{-столбец} \quad (10)$$

будут иметь вид:

$$\Gamma_1 = \gamma_4 \otimes \gamma_1, \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2, \Gamma_3 = \gamma_4 \otimes \gamma_3, \Gamma_4 = \gamma_4 \otimes \gamma_4, \eta = I_4 \otimes \gamma_4. \quad (11)$$

Складывая и вычитая затем соответствующие уравнения систем (7), (9), и вводя функции

$$\begin{aligned} \psi_1^r &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_1^*), \quad \psi_2^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_2 + \psi_2^*), \\ \psi_1^i &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_1^*), \quad \psi_2^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_2 - \psi_2^*), \end{aligned} \quad (12)$$

получим эквивалентную исходной 16-компонентную систему уравнений, которая также может быть записана в форме (1). При этом, если расположить вещественные (ψ_1^r, ψ_2^r) и чисто мнимые (ψ_1^i, ψ_2^i) компоненты волновой функции, например, в последовательности

$$\Psi = (\psi_1^r, \psi_2^r, \psi_1^i, \psi_2^i) \text{- столбец,} \quad (13)$$

матрицы Γ_μ трансформируются к виду

$$\Gamma_1 = -\gamma_5 \otimes \gamma_1, \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2, \Gamma_3 = -\gamma_5 \otimes \gamma_3, \Gamma_4 = -\gamma_5 \otimes \gamma_4, \quad (14)$$

где $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$. Для матрицы же η сохраняется выражение (11).

При выборе полевых функций (12) в системе (1), (13), (14) будем называть ее вещественной формой исходной системы (7), или 16-компонентным вещественным дираковским полем. Аналогичным образом можно записать любое РВУ первого порядка с дираковской алгеброй ма-

триц Γ_μ , в том числе и обычное уравнение Дирака. Преимущество данной записи заключается в том, что она позволяет обнаружить симметрию, которая остается скрытой при использовании стандартной комплексной формы записи РВУ.

2. При установлении группы внутренней симметрии системы (7), записанной в вещественной форме, необходимо учесть следующее. Волновая функция (13) содержит 8 вещественных и 8 мнимых компонент. Это соотношение должно (по определению) сохраняться при преобразованиях (2). Следовательно, к условиям (3), (6) в данном случае добавляется третье: преобразование Q должно оставлять вещественные (мнимые) компоненты волновой функции Ψ вещественными (мнимыми) в том смысле, что если Ψ_A – вещественная (мнимая) функция, то и $\Psi'_A = Q_{AB}\Psi_B$ – также вещественная (мнимая).

На начальном этапе исследования удобно использовать базис (будем называть его фермионным базисом), в котором диракоподобные матрицы Γ_μ (14) принимают вид $\Gamma_\mu = I_4 \otimes \gamma_\mu$. Переход из базиса (13), (14) в фермионный осуществляется посредством унитарного преобразования

$$A = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 + i\gamma_2) - \gamma_5 \otimes (I_4 - i\gamma_2)],$$

$$A^{-1} = A^+ = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 - i\gamma_2) - \gamma_5 \otimes (I_4 + i\gamma_2)].$$
(15)

Группа внутренней симметрии 16-компонентного вещественного дираковского поля может быть задана с помощью генераторов, которые содержатся в наборе

$$\Gamma'_\mu, \Gamma'_5, \Gamma'_\mu\Gamma'_5, \Gamma'_{[\mu}\Gamma'_{\nu]} = \frac{1}{2}(\Gamma'_\mu\Gamma'_\nu - \Gamma'_\nu\Gamma'_\mu), \Gamma'_5 = \Gamma'_1\Gamma'_2\Gamma'_3\Gamma'_4,$$
(16)

определяющем внутреннюю $SU(4)$ -симметрию 16-компонентного комплексного поля Дирака. Здесь Γ'_μ – квадратные матрицы размерности 16×16 , удовлетворяющие, как и Γ_μ , алгебре матриц Дирака, взаимно коммутирующие с Γ_μ и имеющие в фермионном базисе вид $\Gamma'_\mu = \gamma_\mu \otimes I_4$.

Для того чтобы выделить в (16) генераторы, определяющие группу внутренней симметрии системы (7), записанной в вещественной форме, поступим следующим образом. С помощью преобразования A^{-1} (15) переведем генераторы (16) из фермионного базиса в базис (13), в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены. В результате получим:

$$J^1 = \Gamma'_1 = i\gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_2, \quad J^2 = \Gamma'_2 = i\gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_2,$$

$$J^3 = \Gamma'_3 = i\gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_2, \quad J^4 = \Gamma'_4 = i\gamma_4\gamma_5 \otimes \gamma_2,$$

$$J^5 = \Gamma'_5 = \gamma_5 \otimes I_4, \quad J^6 = \Gamma'_1\Gamma'_5 = i\gamma_1 \otimes \gamma_2,$$

$$J^7 = \Gamma'_2\Gamma'_5 = i\gamma_2 \otimes \gamma_2, \quad J^8 = \Gamma'_3\Gamma'_5 = i\gamma_3 \otimes \gamma_2,$$

$$J^9 = \Gamma'_4\Gamma'_5 = i\gamma_4 \otimes \gamma_2, \quad J^{10} = \Gamma'_{[2}\Gamma'_{3]} = \gamma_2\gamma_3 \otimes I_4,$$

$$J^{11} = \Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]} = \gamma_3\gamma_1 \otimes I_4, \quad J^{12} = \Gamma'_{[1}\Gamma'_{2]} = \gamma_1\gamma_2 \otimes I_4,$$

$$J^{13} = \Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]} = \gamma_1\gamma_4 \otimes I_4, \quad J^{14} = \Gamma'_{[2}\Gamma'_{4]} = \gamma_2\gamma_4 \otimes I_4,$$

$$J^{15} = \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]} = \gamma_3\gamma_4 \otimes I_4.$$
(17)

Используя определение (2), выражения (5), (17) для однопараметрических преобразований и третье условие, устанавливаем, какие из параметров ω в (5) являются вещественными, а какие – мнимыми. Проверяя, для каких однопараметрических преобразований выполняется условие (6), находим группу внутренней симметрии рассматриваемого дираковского поля при ее явной параметризации.

Условию (6) удовлетворяют следующие 10 генераторов

$$\Gamma'_1, \Gamma'_3, \Gamma'_4, \Gamma'_5, \Gamma'_1\Gamma'_5, \Gamma'_3\Gamma'_5, \Gamma'_4\Gamma'_5, \Gamma'_{[3\Gamma'_1]}, \Gamma'_{[1\Gamma'_4]}, \Gamma'_{[3\Gamma'_4]}, \quad (18)$$

которым соответствуют 6 вещественных ($\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_{[31]}, \omega_{[14]}, \omega_{[34]}$) и 4 мнимых ($\omega_5, \omega_{15}, \omega_{35}, \omega_{45}$) параметра. Для установления структуры группы, задаваемой генераторами (18), выберем все параметры вещественными. При этом придем к генераторам

$$\Gamma'_1, \Gamma'_3, \Gamma'_4, i\Gamma'_5, i\Gamma'_1\Gamma'_5, i\Gamma'_3\Gamma'_5, i\Gamma'_4\Gamma'_5, \Gamma'_{[3\Gamma'_1]}, \Gamma'_{[1\Gamma'_4]}, \Gamma'_{[3\Gamma'_4]}. \quad (19)$$

Здесь 6 генераторов ($\Gamma'_1, \Gamma'_3, \Gamma'_4, i\Gamma'_1\Gamma'_5, i\Gamma'_3\Gamma'_5, i\Gamma'_4\Gamma'_5$) являются эрмитовскими и 4 ($i\Gamma'_5, \Gamma'_{[3\Gamma'_1]}, \Gamma'_{[1\Gamma'_4]}, \Gamma'_{[3\Gamma'_4]}$) – антиэрмитовскими. Нетрудно убедиться, что эти генераторы удовлетворяют алгебре генераторов группы $SO(3,2)$.

Обнаруженное в данном подходе расширение симметрии по сравнению с ожидаемой группой $SU(2)$ (или $SO(3)$ в присоединенном представлении) в рамках релятивистской квантовой механики соответствует перемешиванию состояний с противоположными значениями энергии, в том числе и для решений из двух различных уравнений Дирака. Группа $SO(3)$, ответственная за перемешивание однотипных по знаку энергии и проекции спина состояний из различных уравнений, содержится в $SO(3,2)$ в качестве подгруппы и задается генераторами

$$\Gamma'_{[3\Gamma'_1]}, \Gamma'_{[1\Gamma'_4]}, \Gamma'_{[3\Gamma'_4]}. \quad (20)$$

3. Для того чтобы выяснить, сохраняется ли установленная выше $SO(3,2)$ -симметрия системы (7) на квантовом уровне, необходимо проверить инвариантность перестановочных соотношений для операторов рождения и уничтожения относительно соответствующих однопараметрических преобразований. С этой целью удобно перевести генераторы (19) из базиса (13), в котором они имеют вид (17), в базис

$$\Psi = (\psi, \bar{\psi}) = (\psi_1, \psi_2, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2) \text{-столбец,} \quad (21)$$

где $\bar{\psi}_i = \psi_i^+ \gamma_4 (i=1,2)$. В результате получим выражения:

$$\begin{aligned} \Gamma'_1 &= -i\gamma_1 \otimes \gamma_2\gamma_4, \quad \Gamma'_3 = -i\gamma_3 \otimes \gamma_2\gamma_4, \\ \Gamma'_4 &= -i\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_4, \quad i\Gamma'_5 = -i\gamma_4 \otimes I_4, \\ i\Gamma'_1\Gamma'_5 &= -\gamma_1\gamma_4 \otimes \gamma_2\gamma_4, \quad i\Gamma'_3\Gamma'_5 = -\gamma_3\gamma_4 \otimes \gamma_2\gamma_4, \\ i\Gamma'_4\Gamma'_5 &= -\gamma_5\gamma_4 \otimes \gamma_2\gamma_4, \quad \Gamma'_{[3\Gamma'_1]} = \gamma_3\gamma_1 \otimes I_4, \\ \Gamma'_{[1\Gamma'_4]} &= \gamma_1\gamma_5 \otimes I_4, \quad \Gamma'_{[3\Gamma'_4]} = \gamma_3\gamma_5 \otimes I_4. \end{aligned} \quad (22)$$

Разложим ψ и $\bar{\psi}$ по «чистым» состояниям, представляющим решения уравнений (7) с положительными и отрицательными частотами и проекциями спина $s = 1/2, -1/2$:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \sum_s a_{is} \psi_{is}^{(+)} + \sum_s b_{is}^+ \psi_{is}^{(-)}, \\ \bar{\psi}_i &= \sum_s a_{is}^+ \bar{\psi}_{is}^{(+)} + \sum_s b_{is} \bar{\psi}_{is}^{(-)}. \end{aligned} \quad (23)$$

При квантовании коэффициенты разложения $a_{is}^+, b_{is}^+, a_{is}, b_{is}$ принимают смысл операторов рождения и уничтожения, для которых постулируются антикоммутиационные соотношения

$$\{a_{is}, a_{i's'}^+\} = \{b_{is}, b_{i's'}^+\} = \delta_{ii'} \delta_{ss'} \quad (24)$$

и все остальные антикоммутанты равны нулю.

Для проверки инвариантности соотношений (24) относительно однопараметрических преобразований, задаваемых генераторами (22), надо установить соответствующие трансформационные свойства операторов рождения и уничтожения. В базисе, определяемом выражениями (8), (21), (22), операторы знака энергии $\hat{\Gamma}_4$, проекции спина $\hat{S}_3 = -\frac{i}{4}\Gamma_{[1}\Gamma_{2]}$ и внутренней четности $\hat{\Pi} = I_2 \otimes (\hat{\sigma}_3 \otimes I_4)$, выступающие в данном случае в качестве операторов полного набора, имеют вид:

$$\hat{\Gamma}_4 = \text{diag}(1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1), \quad (25)$$

$$\hat{S}_3 = \frac{1}{2}\text{diag}(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1), \quad (26)$$

$$\hat{\Pi} = \text{diag}(1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1). \quad (27)$$

Располагая операторы рождения и уничтожения в столбец в последовательности, определяемой выражениями (25) – (27), и проводя над ним (столбцом) преобразования (5), где в качестве J берутся по очереди генераторы (22), устанавливаем искомые трансформационные свойства этих операторов.

В результате для однопараметрического преобразования, задаваемого, например, генератором $\hat{\Gamma}'_1$, получим:

$$\begin{aligned} a'_{1s} &= a_{1s} + \omega b_{2s}, & a'_{2s} &= a_{2s} + \omega b_{1s}, \\ (a'_{1s})' &= a_{1s} + \omega b_{2s}, & (a'_{2s})' &= a_{2s} + \omega b_{1s}, \\ b'_{1s} &= b_{1s} - \omega a_{2s}, & b'_{2s} &= b_{2s} - \omega a_{1s}, \\ (b'_{1s})' &= b_{1s} - \omega a_{2s}, & (b'_{2s})' &= b_{2s} - \omega a_{1s}. \end{aligned} \quad (28)$$

Используя формулы (28), вычислим антикоммутант: $\{a'_{1,1/2}, (b'_{2,1/2})'\} : \{a'_{1,1/2}, (b'_{2,1/2})'\} = \{a_{1,1/2}, b'_{2,1/2}\} + \omega\{a_{1,1/2}, a'_{1,1/2}\} + \omega\{b_{2,1/2}, b'_{2,1/2}\} = \{a_{1,1/2}, b'_{2,1/2}\} + 2\omega \neq \{a_{1,1/2}, b_{2,1/2}\}$. Таким образом, данный антикоммутант, а значит и в целом условия квантования (24), не инвариантны относительно однопараметрического преобразования с генератором $\hat{\Gamma}'_1$.

В случае генератора $\hat{\Gamma}'_3\hat{\Gamma}'_{11}$ имеем:

$$\begin{aligned} a'_{1s} &= a_{1s} + \omega a_{2s}, & a'_{2s} &= a_{2s} - \omega a_{1s}, \\ (a'_{1s})' &= a_{1s} + \omega a_{2s}, & (a'_{2s})' &= a_{2s} - \omega a_{1s}, \\ b'_{1s} &= b_{1s} + \omega b_{2s}, & b'_{2s} &= b_{2s} - \omega b_{1s}, \\ (b'_{1s})' &= b_{1s} + \omega b_{2s}, & (b'_{2s})' &= b_{2s} - \omega b_{1s}. \end{aligned} \quad (29)$$

Аналогичная проверка показывает, что относительно преобразований (29) антикоммутационные соотношения (24) инвариантны.

Расчеты, проведенные для всех остальных однопараметрических преобразований (5) с генераторами (22), показывают, что инвариантность условий квантования (24) имеет место еще для трех генераторов: $\hat{\Gamma}'_{11}\hat{\Gamma}'_{41}$, $\hat{\Gamma}'_{13}\hat{\Gamma}'_{41}$, $i\hat{\Gamma}'_5$. Первые два из них совместно с $\hat{\Gamma}'_{13}\hat{\Gamma}'_{11}$ образуют совпадающий с (20) набор генераторов, который ассоциируется с группой инвариантности $SU(2)$ ($SO(3)$) классического 8-компонентного дираковского поля в обычном подходе. Генератор же $i\hat{\Gamma}'_5$ соответствует фазовому преобразованию при котором $\psi_1 \rightarrow \psi_1 e^{i\omega_5}$, $\psi_2 \rightarrow \psi_2 e^{-i\omega_5}$.

4. Предлагаемый в настоящей работе подход распространяется на дираковские поля произвольной $4n$ размерности, в том числе и на одно уравнение Дирака. Правильные результаты для уравнения Дирака можно получить из вышеприведенных выражений путем вычеркивания

во всех матрицах и генераторах строк и столбцов, соответствующих волновой функции ψ_2 . Тогда из 10 генераторов (19) группы внутренней симметрии системы (7) остаются только три

$$J^1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 0 \end{pmatrix}, J^2 = i \begin{pmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & -I_4 \end{pmatrix}, J^3 = i \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 \\ -\gamma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

остальные обращаются в нуль. Поскольку генераторы J^1 и J^3 являются эрмитовскими, а генератор J^2 – антиэрмитовский, с учетом вещественности всех параметров приходим к выводу: лагранжева формулировка свободного классического уравнения Дирака обладает группой внутренней симметрии $SO(2,1)$. С физической точки зрения этот факт объясняется тем, что в отсутствие электромагнитного взаимодействия состояния частицы и античастицы являются неразличимыми.

Квантовая формулировка теории Дирака базируется на антикоммутиционных соотношениях

$$\{a_s, a_{s'}^+\} = \{b_s, b_{s'}^+\} = \delta_{ss'}. \quad (31)$$

В базисе

$$\Psi = (\psi, \bar{\psi})\text{-столбец}, \quad (32)$$

операторы полного набора имеют следующий вид:

$$\hat{\Gamma}_4 = \text{diag}(1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1), \quad (33)$$

$$\hat{S}_3 = \frac{1}{2} \text{diag}(1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1). \quad (34)$$

Располагая операторы рождения и уничтожения в столбец в порядке, соответствующем выражениям (33), (34), и рассматривая, например, однопараметрическое преобразование с генератором J^3 , получим следующий закон преобразования этих операторов:

$$\begin{aligned} a'_{1/2} &= a_{1/2} + \omega b_{1/2}, & a'_{-1/2} &= a_{-1/2} - \omega b_{-1/2}, \\ (a'_{1/2})' &= a_{1/2}^+ + \omega b_{1/2}^+, & (a'_{-1/2})' &= a_{-1/2}^+ - \omega b_{-1/2}^+, \\ b'_{1/2} &= b_{1/2} + \omega a_{1/2}, & b'_{-1/2} &= b_{-1/2} - \omega a_{-1/2}, \\ (b'_{1/2})' &= b_{1/2}^+ + \omega a_{1/2}^+, & (b'_{-1/2})' &= b_{-1/2}^+ - \omega a_{-1/2}^+. \end{aligned} \quad (35)$$

Используя (35), вычислим, например, антикоммутант: $\{a'_{1/2}, (b'_{1/2})'\} : \{a'_{1/2}, (b'_{1/2})'\} = \{a_{1/2}, b_{1/2}^+\} + \omega \{a_{1/2}, a_{1/2}^+\} + \omega \{b_{1/2}, b_{1/2}^+\} = \{a_{1/2}, b_{1/2}^+\} + 2\omega \neq \{a_{1/2}, b_{1/2}^+\}$. Этот результат означает, что данный антикоммутант, а значит и в целом условия квантования уравнения Дирака, не инвариантны относительно преобразования, задаваемого генератором J^3 . Аналогичный вывод получается и для генератора J^2 . Генератор J^1 соответствует обычному фазовому преобразованию. Следовательно, квантовая формулировка теории Дирака обладает симметрией только относительно фазовых преобразований.

Литература

1. Плетюхов В. А., Стражев В. И. // Вестник БГУ. Сер. 1. 2009. № 2. С. 3–7.

V. A. PLETYUKHOV, V. I. STRAZHEV, P. P. ANDRUSEVICH

INTERNAL SYMMETRY OF THE 8-COMPONENT DIRAC FIELD

Summary

The internal symmetry of the 8-component real Dirac field has been investigated in matrix approach. The classical formulation of the theory has the internal symmetry group $SO(3,2)$. The quantum formulation has the internal symmetry group $SO(3)$.

УДК 539.12

Е. М. ОВСИЮК, В. В. КИСЕЛЬ, В. М. РЕДЬКОВ

**О ДИРАКОВСКОЙ ЧАСТИЦЕ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ
 В ПРОСТРАНСТВЕ РИМАНА**

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 09.04.2010)

Введение. Задача о квантовании уровней энергии квантовомеханической частицы в однородном магнитном поле относится к числу классических в квантовой механике [1, 2]. В работах [3–5] были найдены точные решения уравнения Шредингера для скалярной частицы в магнитном поле на фоне сферического пространства Римана S_3 и гиперболического пространства Лобачевского H_3 . В работах [6–8] был выполнен анализ движения частицы в пространствах постоянной кривизны во внешнем магнитном поле в рамках классической механики. В настоящей работе будут построены точные решения уравнения Дирака в сферическом пространстве Римана во внешнем магнитном поле.

Цилиндрические координаты и уравнение Дирака в пространстве S_3 . В пространстве Римана S_3 будем использовать обобщенную систему цилиндрических координат

$$\begin{aligned}
 dS^2 &= dt^2 - \cos^2 z (dr^2 + \sin^2 r d\phi^2) + dz^2, \\
 z &\in [-\pi/2, +\pi/2], \quad r \in [0, +\pi], \quad \phi \in [0, 2\pi], \\
 u^1 &= \cos z \sin r \cos \phi, \quad u^2 = \cos z \sin r \sin \phi, \quad u^3 = \sin z, \quad u^0 = \cos z \cos r;
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

все координаты обезразмерены делением на радиус кривизны пространства ρ . В этой системе координат аналог однородного магнитного поля плоского пространства задается выражением (см. [5])

$$A_\phi = -2B \sin^2 \frac{r}{2} = B (\cos r - 1).
 \tag{2}$$

Этому 4-потенциалу отвечает единственная ненулевая компонента электромагнитного тензора $F_{\phi r} = \partial_\phi A_r - \partial_r A_\phi = B \sin r$; можно убедиться, что этот тензор удовлетворяет уравнениям Максвелла в сферическом пространстве. Цилиндрическим координатам $x^\alpha = (t, r, \phi, z)$ (1) отвечает тетрада

$$e_{(a)}^\beta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^{-1} z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^{-1} z \sin^{-1} r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.
 \tag{3}$$

Символы Кристоффеля Γ_{kl}^i и коэффициенты вращения Риччи равны

$$\Gamma^r_{jk} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\operatorname{tg} z \\ 0 & -\sin r \cos r & 0 \\ -\operatorname{tg} z & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma^\phi_{jk} = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{ctg} r & 0 \\ \operatorname{ctg} r & 0 & -\operatorname{tg} z \\ 0 & -\operatorname{tg} z & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Gamma^z_{jk} = \begin{vmatrix} \sin z \cos z & 0 & 0 \\ 0 & \sin z \cos z \sin^2 r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_{122} = \frac{1}{\cos zr}, \quad \gamma_{311} = -z, \quad \gamma_{322} = -z. \quad (4)$$

Общековариантное уравнение Дирака (детальнее см. [9]) принимает следующий вид:

$$\left[i\gamma^0 \partial_t + \frac{i\gamma^1}{\cos z} \left(\partial_r + \frac{1}{2r} \right) + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi - eB(\cos r - 1)}{\cos z \sin r} + i\gamma^3 (\partial_z - z) - M \right] \Psi = 0; \quad (5)$$

Здесь использованы обычные обозначения для матриц Дирака. Его можно упростить подстановкой $\Psi = \varphi / \sqrt{\sin r \cos z}$:

$$\left[i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi - eB(\cos r - 1)}{\sin r} + \cos z \left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - M \right) \right] \varphi = 0. \quad (6)$$

Ищем решения в виде

$$\varphi = e^{-i\epsilon t} e^{im\phi} \begin{vmatrix} f_1(r, z) \\ f_2(r, z) \\ f_3(r, z) \\ f_4(r, z) \end{vmatrix}.$$

Соответственно

$$\left[i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} - \mu\gamma^2 + \cos z \left(\epsilon\gamma^0 + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - M \right) \right] \begin{vmatrix} f_1(r, z) \\ f_2(r, z) \\ f_3(r, z) \\ f_4(r, z) \end{vmatrix} = 0, \quad \mu = \frac{m + eB(\cos r - 1)}{\sin r}. \quad (7)$$

Выбирая матрицы Дирака в спинорном базисе, находим уравнения для функций $f_a(r, z)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu \right) f_4 + \cos z \frac{\partial f_3}{\partial z} + i \cos z (\epsilon f_3 - M f_1) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu \right) f_3 - \cos z \frac{\partial f_4}{\partial z} + i \cos z (\epsilon f_4 - M f_2) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu \right) f_2 + \cos z \frac{\partial f_1}{\partial z} - i \cos z (\epsilon f_1 - M f_3) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu \right) f_1 - \cos z \frac{\partial f_2}{\partial z} - i \cos z (\epsilon f_2 - M f_4) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Накладываем линейное ограничение $f_3 = A f_1$, $f_4 = A f_2$. Получаемая система уравнений совместна, если выполняется условие

$$\epsilon - \frac{M}{A} = -\epsilon + MA \quad \Rightarrow \quad A = A_{1,2} = \frac{\epsilon \pm p}{M}, \quad (p = +\sqrt{\epsilon^2 - M^2}). \quad (9)$$

При этом задача сводится к системе двух уравнений:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_2 + \cos z \frac{\partial f_1}{\partial z} + i \cos z (-\varepsilon + MA) f_1 &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_1 - \cos z \frac{\partial f_2}{\partial z} + i \cos z (-\varepsilon + MA) f_2 &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В соответствии с двумя возможностями в (9), имеем две системы уравнений:

$$A = (\varepsilon + p) / M, \quad \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_2 + \cos z \left(\frac{\partial}{\partial z} + ip\right) f_1 = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_1 - \cos z \left(\frac{\partial}{\partial z} - ip\right) f_2 = 0; \quad (11)$$

$$A = (\varepsilon - p) / M, \quad \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_2 + \cos z \left(\frac{\partial}{\partial z} - ip\right) f_1 = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_1 - \cos z \left(\frac{\partial}{\partial z} + ip\right) f_2 = 0. \quad (12)$$

Ищем решения в виде (для определенности рассматриваем случай (11))

$$f_1 = Z_1(z) R_1(r), \quad f_2 = Z_2(z) R_2(r).$$

Введем постоянную разделения λ (квадрат этой величины описывает вклад в общую энергию поперечного магнитному полю движения частицы):

$$\cos z \left(\frac{d}{dz} + ip\right) Z_1 = \lambda Z_2, \quad \cos z \left(\frac{d}{dz} - ip\right) Z_2 = \lambda Z_1. \quad (13)$$

При этом система (11) примет вид

$$\left(\frac{d}{dr} + \mu\right) R_2 + \lambda R_1 = 0, \quad \left(\frac{d}{dr} - \mu\right) R_1 - \lambda R_2 = 0. \quad (14)$$

Решение уравнений по z -переменной. Из (13) получим дифференциальное уравнение для $Z_1(z)$:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{\sin z}{\cos z} \frac{d}{dz} + p^2 - ip \frac{\sin z}{\cos z} - \frac{\lambda^2}{\cos^2 z}\right) Z_1 = 0. \quad (15)$$

Введем новую переменную $y = (1 + itg z) / 2$. Уравнение принимает вид

$$\left[4y(1-y) \frac{d^2}{dy^2} + 2(1-2y) \frac{d}{dy} - p^2 \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{y}\right) + p \left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{y}\right) + 4\lambda^2\right] Z_1 = 0. \quad (16)$$

Сделаем подстановку $Z_1 = y^A (1-y)^C Z(y)$. При этом получаем

$$\begin{aligned} 4y(1-y) \frac{d^2 Z}{dz^2} + 4 \left[2A + \frac{1}{2} - (2A + 2C + 1)y\right] \frac{dZ}{dz} + \\ \left[\frac{2A(2A-1) - p(p+1)}{y} + \frac{2C(2C-1) - p(p-1)}{1-y} - 4(A+C)^2 + 4\lambda^2\right] Z = 0. \end{aligned}$$

Требуем выполнения равенств

$$A = -\frac{p}{2}, \frac{p+1}{2}, \quad C = \frac{p}{2}, \frac{1-p}{2}, \quad (17)$$

при этом уравнение для Z принимает вид гипергеометрического уравнения

$$y(1-y) \frac{d^2 Z}{dz^2} + \left[2A + \frac{1}{2} - (2A + 2C + 1)y\right] \frac{dZ}{dz} - [(A+C)^2 - \lambda^2] Z = 0.$$

Параметры гипергеометрической функции определяются соотношениями

$$\alpha = \lambda + A + C, \quad \beta = -\lambda + A + C, \quad \gamma = 2A + \frac{1}{2},$$

$$Z_1 = \left(\frac{e^{iz}}{\cos z} \right)^A \left(\frac{e^{-iz}}{\cos z} \right)^C F \left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{e^{iz}}{2 \cos z} \right). \quad (18)$$

Есть четыре возможности в зависимости от выбора параметров A и C (для определенности предполагаем, что $\lambda > 0$; общности рассмотрения это не уменьшает):

$$1) \quad A = \frac{p+1}{2}, \quad C = \frac{1-p}{2}, \quad A+C=1, \quad A-C=p,$$

$$\beta = -N, \quad \Rightarrow \quad \text{спектр} \quad \lambda = 1 + N, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

$$\alpha = \lambda + 1, \quad \gamma = p + \frac{3}{2}, \quad Z_1 = \frac{e^{ipz}}{\cos z} F \left(\lambda + 1, -N, p + \frac{3}{2}; \frac{e^{iz}}{2 \cos z} \right). \quad (19)$$

$$2) \quad A = -\frac{p}{2}, \quad C = \frac{p}{2}, \quad A+C=0, \quad A-C=-p,$$

$$\beta = -N, \quad \Rightarrow \quad \text{спектр} \quad \lambda = N, \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\alpha = +N, \quad \gamma = -p + \frac{1}{2}, \quad Z_1 = e^{-ipz} F \left(\lambda, -N, -p + \frac{1}{2}; \frac{e^{iz}}{2 \cos z} \right). \quad (20)$$

Обращаем внимание на то, что в этих двух случаях мы не находим условия квантования для параметра p , вместо этого получили условие квантования для параметра λ . Но следует обратить внимание на то, что условие квантования для параметра λ также будет следовать из системы радиальных уравнений по переменной r , и эти два правила квантования не совпадут. Поэтому дальше решения случаев 1 и 2 не рассматриваем.

$$3) \quad A = \frac{p+1}{2}, \quad C = \frac{p}{2}, \quad A+C = p + 1/2, \quad A-C = 1/2,$$

$$\beta = -N \Rightarrow \text{спектр} \quad p = +\sqrt{\varepsilon^2 - M^2} = \lambda - (N + 1/2), \quad N = 0, 1, 2, \dots, N_{max}$$

$$\alpha = \lambda + p + \frac{1}{2}, \quad \gamma = p + \frac{3}{2}, \quad Z_1 = \frac{e^{iz/2}}{(\cos z)^{p+1/2}} F \left(\lambda + p + \frac{1}{2}, -N, p + \frac{3}{2}; \frac{e^{iz}}{2 \cos z} \right). \quad (21)$$

$$4) \quad A = -\frac{p}{2}, \quad C = \frac{1-p}{2}, \quad A+C = -p + 1/2, \quad A-C = -1/2,$$

$$\alpha = -N, \quad \Rightarrow \quad \text{спектр} \quad p = \sqrt{\varepsilon^2 - M^2} = \lambda + (N + 1/2),$$

$$\beta = -\lambda - p + \frac{1}{2}, \quad \gamma = -p + \frac{1}{2}, \quad Z_1 = \frac{e^{-iz/2}}{(\cos z)^{-p+1/2}} F \left(\lambda - p + \frac{1}{2}, -N, -p + \frac{1}{2}; \frac{e^{iz}}{2 \cos z} \right). \quad (22)$$

Решения типов 3 и 4 отвечают качественно разным физическим ситуациям:

$$3) \quad p = +\sqrt{\varepsilon^2 - M^2} = \lambda - (N + 1/2);$$

$$4) \quad p = +\sqrt{\varepsilon^2 - M^2} = \lambda + (N + 1/2). \quad (23)$$

В случае 3 движение вдоль оси z уменьшает общую энергию; в случае 4 движение вдоль оси z увеличивает общую энергию. Последний вариант кажется более понятным по физическим соображениям. Возможно, что обе ситуации реализуются физически и являются проявлением совместного действия магнитного поля и геометрии сферического пространства S_3 .

Решение уравнений по r -переменной. Из системы (14) следует уравнение для R_1 (для краткости обозначаем eB как B)

$$\frac{d^2 R_1}{dr^2} + \left[\frac{m \cos r - B(\cos r - 1)}{\sin^2 r} - \frac{[m + B(\cos r - 1)]^2}{\sin^2 r} + \lambda^2 \right] R_1 = 0. \quad (24)$$

Введем новую переменную $y = (1 + \cos r) / 2$. Уравнение примет вид

$$y(1-y) \frac{d^2 R_1}{dy^2} + \left(\frac{1}{2} - y \right) \frac{dR_1}{dy} - \left[-\lambda^2 + \frac{m^2}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} \right) + \frac{m}{4} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1-y} \right) - \frac{mB}{y} - B^2 \left(1 - \frac{1}{y} \right) - \frac{B}{2y} \right] R_1 = 0. \quad (25)$$

Сделаем подстановку $R_1 = y^A (1-y)^C R(y)$. Уравнение дает

$$y(1-y) \frac{d^2 R}{dy^2} + \left[2A + \frac{1}{2} - (2A + 2C + 1)y \right] \frac{dR}{dy} + \left[\frac{A^2 - A/2 - m^2/4 - m/4 + mB - B^2 + B/2}{y} + \frac{C^2 - C/2 - m^2/4 + m/4}{1-y} - (A+C)^2 + \lambda^2 + B^2 \right] R = 0.$$

Требуем выполнения равенств

$$A = \frac{2B - m}{2}, \quad \frac{-2B + m + 1}{2}, \quad C = \frac{m}{2}, \quad \frac{1 - m}{2}, \quad (26)$$

в результате приходим к уравнению гипергеометрического типа

$$y(1-y) \frac{d^2 R}{dy^2} + \left[2A + \frac{1}{2} - (2A + 2C + 1)y \right] \frac{dR}{dy} - \left[(A+C)^2 - \lambda^2 - B^2 \right] R = 0. \quad (27)$$

Параметры гипергеометрической функции определяются соотношениями

$$\alpha = A + C - \sqrt{B^2 + \lambda^2}, \quad \beta = A + C + \sqrt{B^2 + \lambda^2}, \quad \gamma = 2A + \frac{1}{2},$$

$$R_1 = (1 + \cos r)^A (1 - \cos r)^C F \left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 + \cos r}{2} \right). \quad (28)$$

Чтобы решение обращалось в ноль в начале координат $r = 0$ (при этом находимся на половине замкнутой линии $u_0 = +\cos z, u_3 = \sin z, u_1 = 0, u_2 = 0$) и при $r = \pi$ (при этом находимся на другой половине этой замкнутой линии $u_0 = -\cos z, u_3 = \sin z, u_1 = 0, u_2 = 0$), нужно выбирать положительные значения параметров A и C :

$$R_1 = (1 + \cos r)^A (1 - \cos r)^C F \left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 + \cos r}{2} \right), \quad A > 0, \quad C > 0. \quad (29)$$

Проследим за 4-мя возможными вариантами (для определенности считаем, что $B > 0$ – на общность рассмотрения это не влияет).

$$\begin{aligned}
1) \quad & C = \frac{m}{2} > 0, \quad A = \frac{2B-m}{2} > 0, \quad C+A = +B. \\
2) \quad & C = \frac{m}{2} > 0, \quad A = \frac{m+1-2B}{2} > 0, \quad C+A = -B+m+\frac{1}{2}. \\
3) \quad & C = \frac{1-m}{2} > 0, \quad A = \frac{m+1-2B}{2} > 0, \quad C+A = 1-B > 0. \\
4) \quad & C = \frac{1-m}{2} > 0, \quad A = \frac{2B-m}{2} > 0, \quad C+A = B-m+\frac{1}{2}. \quad (30)
\end{aligned}$$

Приведем соответствующие решения.

$$1) \quad 0 < m < 2B,$$

$$\begin{aligned}
R_1 &= (1 + \cos r)^{(2B-m)/2} (1 - \cos r)^{m/2} F\left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 + \cos r}{2}\right), \\
\alpha &= -n, \quad \beta = 2B + n, \quad \gamma = 2B - m - 1, \\
\text{спектр} \quad \lambda^2 &= 2Bn + n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (31)
\end{aligned}$$

$$2) \quad m > 0, \quad m > 2B - 1,$$

$$\begin{aligned}
R_1 &= (1 + \cos r)^{(m+1-2B)/2} (1 - \cos r)^{m/2} F\left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 + \cos r}{2}\right), \\
\alpha &= -n, \quad n + m + 1/2 - B = \sqrt{B^2 + \lambda^2}, \\
\beta &= n + 2m + 1 - 2B, \quad \gamma = -2B + m + 3/2. \\
\alpha = -n \quad \Rightarrow \quad \sqrt{B^2 + \lambda^2} &= B + \left(m + n + \frac{1}{2}\right), \\
\text{спектр} \quad \lambda^2 &= -2B\left(m + n + \frac{1}{2}\right) + \left(n + m + \frac{1}{2}\right)^2, \\
\lambda^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad n + m + \frac{1}{2} &> 2B. \quad (32)
\end{aligned}$$

$$3) \quad m < 1, \quad m > 2B - 1, \quad 0 < B < 1,$$

$$\begin{aligned}
R_1 &= (1 + \cos r)^{(m+1-2B)/2} (1 - \cos r)^{(1-m)/2} F\left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 + \cos r}{2}\right); \\
\alpha &= -n, \quad 1 - B + n = \sqrt{B^2 + \lambda^2}, \\
\beta &= 2 - 2B + n, \quad \gamma = -2B + m + 3/2, \\
\text{спектр} \quad \lambda^2 &= -2B(n+1) + (n+1)^2, \quad n+1 > 2B. \quad (33)
\end{aligned}$$

$$4) \quad m < 1, \quad m < 2B, \quad m < B + 1/2$$

$$\begin{aligned}
R_1 &= (1 + \cos r)^{(2B-m)/2} (1 - \cos r)^{(1-m)/2} F\left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 + \cos r}{2}\right), \\
\alpha &= -n, \quad B + n - m + \frac{1}{2} = \sqrt{B^2 + \lambda^2},
\end{aligned}$$

$$\beta = 2B - 2m + 1 + n, \quad \gamma = 2B - m + \frac{1}{2},$$

$$\text{спектр} \quad \lambda^2 = 2B \left(n - m + \frac{1}{2} \right) + \left(n - m + \frac{1}{2} \right)^2. \quad (34)$$

В заключение сделаем два поясняющих замечания. Нужно иметь в виду существенный момент: использованное при разделении переменных уравнение $-i\partial_\phi \Psi = m \Psi$ – это фактически преобразованное от квазидекартовой тетрады к цилиндрической уравнение на собственные значения для оператора третьей проекции полного момента импульса частицы со спином $1/2$:

$$\hat{j}_3 \Psi_{\text{Cart}} = \left(-i \frac{\partial}{\partial \phi} + \Sigma_3 \right) \Psi_{\text{Cart}} = m \Psi = m \Psi_{\text{Cart}}; \quad (35)$$

т. е. для квантового числа m разрешены полуцелые значения $m = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$

Если использовать обычные единицы измерения, то символ B обозначает следующее (предполагаем использование системы единиц в СИ) $B \longrightarrow eB\rho^2 / \hbar$. Поэтому в пределе исчезновения кривизны (формально следует параметр $\rho \rightarrow +\infty$) из четырех отмеченных выше классов невырожденными оказываются только

$$1) \rho \rightarrow +\infty \quad m = +1/2, +3/2, \dots; \quad 4) \rho \rightarrow +\infty \quad m = -1/2, -3/2, \dots$$

Авторы признательны участникам научного семинара Лаборатории теоретической физики Института физики НАН Беларуси за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

Литература

1. Landau L. // Ztschr. Phys. 1930. Bd. 64. S. 629–637.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика, нерелятивистская теория. М., 1974.
3. Bogush A. A., Red'kov V. M., Krylov G. G. // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2008. Vol. 11. N 4, P. 403–416.
4. Богущ А. А., Редьков В. М., Крылов Г. Г. // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 2. С. 45–51.
5. Богущ А. А., Редьков В. М., Крылов Г. Г. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 2. С. 57–63.
6. Kudryashov V. V., Kurochkin Yu. A., Ovsyuk E. M., Red'kov V. M. // AIP Conference Proceedings. 2010. Vol. 1205. P. 120–126.
7. Кудряшов В. В., Курочкин Ю. А., Овсюк Е. М., Редьков В. М. // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 6. С. 50–53.
8. Kudryashov V. V., Kurochkin Yu. A., Ovsyuk E. M., Red'kov V. M. Classical Particle in Presence of Magnetic Field, Hyperbolic Lobachevsky and Spherical Riemann Models. SIGMA, 004, 34 pages (2010).
9. Редьков В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца. Минск, 2009.

E. M. OVSIYUK, V. V. KISEL, V. M. RED'KOV

DIRAC PARTICLE IN THE HOMOGENEOUS MAGNETIC FIELD IN THE RIEMANN SPACE

Summary

There are constructed exact solutions of the Dirac equation in the space of constant positive curvature, spherical Riemann space, in the presence of an external magnetic field, being analogue of the homogeneous magnetic field in the Minkowski space. A generalized formula for energy levels describing the quantization of the motion of the particle in the magnetic field on the background of the Riemann space geometry is obtained.

УДК 534.535

Г. В. КУЛАК¹, А. Е. АНИСИМОВА¹, А. Г. МАТВЕЕВА¹, П. И. РОПОТ²

ВОЗБУЖДЕНИЕ ГИПЕРЗВУКА СИСТЕМОЙ ВСТРЕЧНО-ШТЫРЕВЫХ ЭЛЕКТРОДОВ В КРИСТАЛЛАХ НИОБАТА ЛИТИЯ ДЛЯ ШИРОКОПОЛОСНОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

¹ Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина,

² Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 16.04. 2010)

Введение. Кристаллы ниобата лития (LiNbO_3) используются для разработки акустооптических (АО) модуляторов, ультразвуковых линий задержки, акустических фильтров на поверхностных акустических волнах (ПАВ) [1, 2]. Перспективность данных кристаллов в СВЧ-диапазоне спектра акустических волн обоснована низким уровнем затухания ультразвука и высокими значениями коэффициента электромеханической связи. Возможность эффективного возбуждения объемных акустических волн системой встречно-штыревых преобразователей (ВШП) показана в работе [3]. Такие устройства, отличающиеся простотой и технологичностью, экспериментально реализованы в работе [4] для создания широкополосных АО дефлекторов и ультразвуковых линий задержки СВЧ-диапазона. Теоретические исследования в [4] ограничены, однако, возбуждением сдвиговых ультразвуковых (УЗ) волн с использованием приближенной теории антенных решеток. В работе [5] экспериментально реализован широкополосный АО дефлектор на основе кристалла LiNbO_3 с поверхностным возбуждением УЗ волн и последовательной дифракцией света на сдвиговых и продольных УЗ волнах. Показано [6], что широкополосные АО дефлекторы с поверхностным аподизированным пьезопреобразователем могут являться основным элементом целого ряда измерителей радиотехнического назначения, т. е. частотомеров, спектроанализаторов, корреляторов, демодуляторов частотно- и фазомодулированных сигналов. Особенности возбуждения объемных ультразвуковых волн системой ВШП в гексагональных кристаллах исследованы в работе [7].

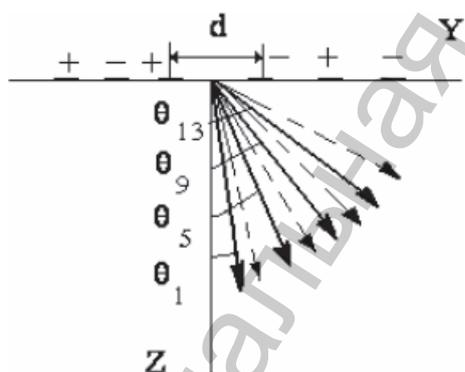


Рис. 1. Схема возбуждения сдвиговых и продольных объемных УЗ волн системой ВШП (сплошные линии соответствуют сдвиговым УЗ волнам, пунктирные линия – продольным; «левосторонние» лепестки, расположенные симметрично относительно оси OZ , не показаны)

Однако к настоящему времени остались не изучены ряд особенностей нерезонансного возбуждения продольных и сдвиговых гиперзвуковых волн в кристаллах ниобата лития в широком диапазоне спектра. Представляет интерес и оценка перспективы применения нерезонансного эффекта для осуществления широкополосного АО взаимодействия с достаточной эффективностью дифракции. Настоящая работа посвящена исследованию нерезонансного возбуждения объемных УЗ волн высокой частоты системой ВШП в широком диапазоне акустического спектра в тригональных кристаллах ниобата лития.

Теоретические результаты и обсуждение. Многоэлементная система ВШП с периодом d : (ширина металлической полоски плюс неметаллизированный участок) представлена на рис. 1. Эффективная длина перекрытия электродов ВШП $w \gg d$. Противофазное высокочастотное

напряжение, поданное на электроды, позволяет возбуждать объемные УЗ волны высокой частоты под малыми углами к оси OZ .

С увеличением частоты СВЧ поля на электродах ВШП последовательно возбуждаются псевдоповерхностные ПАВ Рэлея, передающие энергию в объемные УЗ волны [8, 9]. Резонансные частоты ПАВ находим из соотношений: $f_{2m'+1} = v_R(2m'+1) / 2d, m' = 0, 1, 2, 3, \dots$, где v_R – фазовая скорость рэлеевской УЗ волны, распространяющейся вдоль оси OY . Каждой гармонике ПАВ частотой $f_{2m'+1}$ соответствует квазиобъемная УЗ волна, распространяющаяся со скоростью v_s под следующим углом [7]:

$$\theta_{2m'+1}^{2m'+1} = \arcsin [v_s(2m+1) / 2df_1(2m'+1)], \quad (1)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$.

Для реализации малых углов по отношению к оси OZ следует использовать высокие гармоники ПАВ. Под наименьшим углом распространяются волны, соответствующие $m = 0$.

Рассмотрим кристаллы тригональных сингоний класса $3m$, к которым относится LiNbO_3 . Фурье-компоненты \hat{u} для вектора смещений квазиобъемных УЗ волн даются соотношениями [7]:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= A_1 e^{-iq_1 Kx_3} + A_3 e^{-iq_3 Kx_3} + b_1 \hat{\phi}_0 e^{-rKx_3}, \\ \hat{u}_3 &= p_1 A_1 e^{-iq_1 Kx_3} + p_3 A_3 e^{-iq_3 Kx_3} + b_3 \hat{\phi}_0 e^{-rKx_3}, \end{aligned} \quad (2)$$

где A_1 и A_3 – коэффициенты, определяемые граничными условиями на свободной поверхности; $p_1 = -(c_{11} - \rho v^2 - c_{44} q_1^2) / (c_{13} + c_{44}) q_1$, $p_3 = -(c_{11} - \rho v^2 - c_{44} q_3^2) / (c_{13} + c_{44}) q_3$; $K = (2\pi f \sin \theta) / v$; $v(\theta)$ – фазовая скорость продольной или сдвиговой УЗ волны, $r = (\varepsilon_{11}^s / \varepsilon_{33}^s)^{1/2}$, $\varepsilon_{11}^s, \varepsilon_{33}^s$ – компоненты диэлектрической проницаемости зажатого кристалла.

Электрический потенциал на свободной поверхности кристалла дается соотношением [7, 8]:

$$\hat{\phi}_0(K) = -\frac{i}{K} \sum_{m=0}^{\infty} F_m \left[\frac{\sin(K - \chi_m)L/2}{(K - \chi_m)} + \frac{\sin(K + \chi_m)L/2}{(K + \chi_m)} \right], \quad (3)$$

где $\chi_m = (2m+1)\pi / d$; $F_m = \pi u_0 P_m(2\bar{s}^2 - 1) / dK'(\bar{s})$ – амплитуды пространственных гармоник электрического поля, причем $\bar{s} = \sin(\pi\bar{a}/2)$; $\bar{a} = b/d$; $K'(\bar{s}) = K(\sqrt{1-\bar{s}^2})$ – полный эллиптический интеграл, u_0 – напряжение на электродах ВШП; P_m – полиномы Лежандра; $L = (N-1)d$ – активная длина ВШП, N и $d = a+b$ – соответственно число штырей и период ВШП. Для простых условий технологии изготовления ВШП $a = b$. Тогда $\bar{s} = 1/\sqrt{2}$ и равны нулю следующие полиномы Лежандра: $P_3(0) = P_7(0) = P_{11}(0) = \dots = 0$, вследствие чего системой ВШП возбуждаются нечетные гармоники $(2m+1)$ порядка 1, 5, 9, 13, Резонансные частоты ПАВ определяются из соотношений: $f_{2m+1} = v_R(2m+1) / 2d, m = 0, 1, 2, 3, \dots$, где v_R – фазовая скорость рэлеевской УЗ волны, распространяющейся вдоль оси OY . Первая резонансная частота равна соответственно $f_1 = v_R / \Lambda$, где $\Lambda = 2d$.

Комплексные постоянные $q_{1,3}$, соответствующие значениям амплитуд p_1 и p_3 компоненты \hat{u}_3 вектора смещения, в силу конечности величины смещения будут содержать отрицательную мнимую часть и находятся из уравнения:

$$q^2 = -c_0 \pm [c_0^2 - c_{44}^{-1} c_{33}^{-1} (c_{11} - \rho v^2 (c_{44} - \rho v^2))^{1/2}], \quad (4)$$

где

$$c_0 = \frac{1}{2} \left[c_{33}^{-1} (c_{44} - \rho v^2) + c_{44}^{-1} (c_{11} - \rho v^2) - c_{33}^{-1} c_{44}^{-1} (c_{13} + c_{44})^2 \right].$$

При учете пьезоэлектрического эффекта фазовые скорости УЗ волн даются выражением [5]: $\tilde{v}_{l,s} = v_{l,s}(1 + \tilde{K}_{l,s}^2 / 2)$, где $v_{l,s}$ – фазовые скорости продольной и сдвиговой УЗ волны, $\tilde{K}_{l,s}$ – коэффициент электромеханической связи.

Величины b_1, b_3 , входящие в выражения (2) имеют следующий вид:

$$b_1 = \frac{\Delta_{b1}}{\Delta_b}, \quad b_3 = \frac{\Delta_{b3}}{\Delta_b}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{b1} &= -ir[(e_{15} - r^2 e_{33})(c_{13} + c_{44}) + (e_{15} + e_{31})(\rho v^2 - c_{44} + r^2 c_{33})], \\ \Delta_{b3} &= [(e_{15} - r^2 e_{33})(\rho v^2 - c_{11} + r^2 c_{44}) - r^2(c_{13} + c_{44})(e_{15} + e_{31})], \\ \Delta_b &= [(\rho v^2 - c_{11} + r^2 c_{44})(\rho v^2 - c_{44} + r^2 c_{33}) + r^2(c_{13} + c_{44})^2]. \end{aligned}$$

Коэффициенты A_1, A_3 пропорциональны $\hat{\phi}_0$ и определяются как:

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \hat{\phi}_0, \quad A_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \hat{\phi}_0, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -[c_{44}(q_3 + p_3)(ire_{33} + irc_{33}b_3 - c_{13}b_1) + (c_{13} + c_{33}q_3 p_3)(e_{15} + c_{44}b_3 - irc_{44}b_1)], \\ \Delta_3 &= c_{44}(q_1 + p_1)(ire_{33} + irc_{33}b_3 - c_{13}b_1) + (c_{13} + c_{33}q_1 p_1)(e_{15} + c_{44}b_3 + irc_{44}b_1), \\ \Delta &= c_{44}(q_1 + p_1)(c_{13} + c_{33}q_3 p_3) - c_{44}(q_3 + p_3)(c_{13} + c_{33}q_1 p_1). \end{aligned}$$

Для сдвиговой УЗ волны величина смещения дается соотношением:

$$u_s = \sqrt{u_{1s}^2 + u_{3s}^2}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} u_{1s} &= \frac{\hat{\phi}_0(K_s)}{\sqrt{2\pi R_1 |\varphi''(K_s)|}} \left[\frac{\Delta_1(K_s)}{\Delta} + \frac{\Delta_3(K_s)}{\Delta} \right], \\ u_{3s} &= \frac{\hat{\phi}_0(K_s)}{\sqrt{2\pi R_1 |\varphi''(K_s)|}} \left[p_1 \frac{\Delta_1(K_s)}{\Delta} + p_3 \frac{\Delta_3(K_s)}{\Delta} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где R_1 – расстояние от области размещения ВШП до точки наблюдения УЗ поля; $\varphi(K_s) = 2\pi f / \tilde{v}_s(K_s) \sin(\theta)$; $K_s = 2\pi f \sin(\theta) / \tilde{v}_s(\theta)$; $\varphi''(K_s)$ – вторая производная; \tilde{v}_s – фазовая скорость сдвиговой пьезоактивной УЗ волны.

Величина смещения продольной УЗ волны определяется соотношением, аналогичным (7), в котором следует выполнить замены: $s \rightarrow l$; $\tilde{v}_s \rightarrow \tilde{v}_l$, где \tilde{v}_l – фазовая скорость пьезоактивной продольной УЗ волны.

Численные расчеты проводились для кристалла LiNbO_3 YZ-среза. При этом фазовые скорости продольных и сдвиговых УЗ волн, распространяющихся вдоль оси OZ, составляли соответственно: $v_l = 7200$ м/с и $v_s = 3570$ м/с [10]. Встречно-штыревой преобразователь имел период $d = 10,6$ мкм и число пар штырей $N = 19$. Полагалось также, что $a = b = d/2$. Другие постоянные, характеризующие акустические свойства кристалла, заимствованы в [10].

Для получения широких полос АО взаимодействия необходимо возбудить высокие гармоники ПАВ, т. е. пятую, девятую и тринадцатую. При этом резонансные частоты, соответствующие этим гармоникам, равны $f_5 = 0,9$ ГГц, $f_9 = 1,6$ ГГц, $f_{13} = 2,3$ ГГц. Данным частотам соответствуют следующие резонансные углы возбуждения сдвиговых УЗ волн: $\theta_5^{1s} = 10,6^\circ$, $\theta_9^{1s} = 6,2^\circ$, $\theta_{13}^{1s} = 4,13^\circ$. Резонансные углы возбуждения продольных УЗ волн больше сдвиговых ($\tilde{v}_s \ll \tilde{v}_l$) и равны соответственно: $\theta_5^{1l} = 20,3^\circ$, $\theta_9^{1l} = 12^\circ$, $\theta_{13}^{1l} = 8,4^\circ$. Резонансные углы получены на основании числен-

ных расчетов амплитуд смещений для продольных и сдвиговых УЗ волн с использованием выражений (7) и (8). Они близки по значению углам, полученным на основании выражений (1). Процесс возбуждения объемных УЗ волн системой ВШП не является однако резонансным эффектом [4, 6]. При этом по заданной центральной частоте УЗ излучения невозможно рассчитать период ВШП. Из выражений (7), (8) также следует, что ВШП с заданным периодом возбуждает объемные звуковые волны со всеми частотами, большими резонансных частот возбуждения ПАВ ($f > f_{2m'+1}$).

Численные расчеты показывают, что наряду с узкими резонансными максимумами (рис. 2) при интерференционном наложении волн боковых лепестков резонансного возбуждения в кристалле возникают нерезонансные области возбуждения гиперзвука в широком угловом (θ) и частотном (f) диапазоне. При этом амплитуда смещения в областях нерезонансного возбуждения гиперзвука лишь на порядок меньше, чем в максимуме резонансной области. Например, при интенсивности УЗ волны ~ 10 Вт/см² максимальная резонансная амплитуда сдвиговой составляющей u_s равна $1,2 \cdot 10^{-7}$ м, а в нерезонансной области она составляет $\sim 10^{-8}$ м. Амплитуды смещений продольных (u_l) составляющих УЗ волн (рис. 2, б), в резонансной и нерезонансной областях отличаются более значительно. Сдвиговые (u_s) составляющие (рис. 2, а) имеют более широкие области углового и частотного спектра возбуждения гиперзвука. Например, в интервале углов $\Delta\theta^s = 4,8^\circ - 5,6^\circ$ диапазон перестройки частоты составляет $\Delta f = (1,65 - 2)$ ГГц. Угловому диапазону $\Delta\theta^s = 6,8^\circ - 7,6^\circ$ соответствует частотный диапазон перестройки $\Delta f = (1,1 - 1,4)$ ГГц. Следует отметить, что частотный диапазон нерезонансного возбуждения продольных УЗ волн сдвинут в сторону меньших частот по сравнению с частотным диапазоном сдвиговых, однако, при этом значительно отличаются резонансные углы возбуждения θ .

Заключение. Рассмотренные особенности нерезонансного возбуждения гиперзвука в широком частотном диапазоне спектра свидетельствуют о возможности их применения для создания широкополосных АО deflectоров, спектроанализаторов и ультразвуковых линий задержки СВЧ-диапазона. Наибольший практический интерес представляет изотропная дифракция световых пучков на сдвиговых УЗ волнах. При этом больших величин достигает коэффициент акустооптического качества. Следует однако отметить, что использование расходящихся световых пучков для осуществления широкополосной АО дифракции существенно снижает эффективность дифракции [11]. Отметим, что частотный диапазон перестройки АО устройств может быть расширен вовлечением в АО взаимодействие наряду со сдвиговыми и продольных УЗ волн. При таком подходе следует совместить угловые диапазоны для продольных и сдвиговых УЗ волн за счет подбора периода системы ВШП.

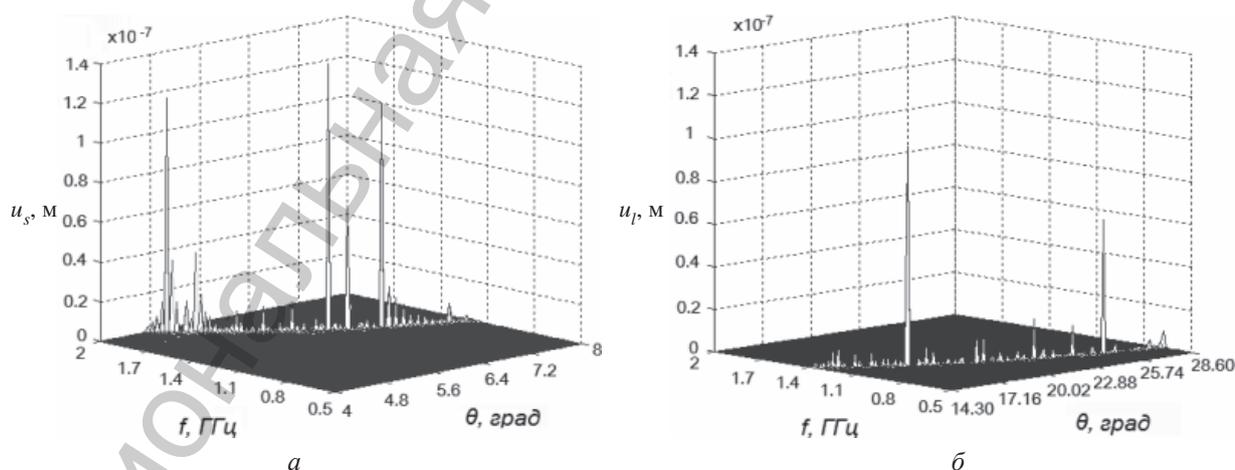


Рис. 2. Зависимость амплитуды смещения от полярного угла θ и частоты ультразвука f для сдвиговых u_s (а) и продольных u_l (б) УЗ волн ($u_0 = 1$ В, $d = 10,6$ мкм, $a = b$, $R_1 = 0,01$ м, $L = 201,4$ мкм)

Литература

1. Кайно Г. Акустические волны. Устройства, визуализация и аналоговая обработка сигналов. М., 1990.
2. Интегральные пьезоэлектрические устройства фильтрации и обработки сигналов: Справочное пособие / Под ред. Б. Ф. Высоцкого и В. В. Дмитриева. М., 1985.
3. Robert F. M., Reilly N. H. C., Redwood M. // IEEE Trans. on Sonics and Ultrason. 1977. Vol. SU-24, N 3. P. 147–166.
4. Винник Д. М., Вороняк Г. И. // Техника и технология СВЧ. 2007. № 2. С. 17–20.
5. Белый В. Н., Войтенко И. Г., Кулак Г. В. и др. // ЖТФ. 1989. Т. 59, вып. 5. С. 82–85.
6. Волик Д. П., Раздобудько В. В. // ЖТФ. 2009. Т. 79, вып. 6. С. 124–128.
7. Дьельсан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. М., 1982.
8. Балакирев М. К., Гилинский И. А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск, 1982.
9. Уэйджерс Р. С. // ТИИЭР. 1976. Т. 64, вып. 5. С. 155–158.
10. Блистанов А. А., Бондаренко В. С., Чкалова В. В. и др. Акустические кристаллы: Справочник / Под ред. М. П. Шаскольской. М., 1986.
11. Балакший В. И., Парыгин В. Н., Чирков Л. Е. Физические основы акустооптики. М., 1985.

G. B. KULAK, A. E. ANISIMOVA, A. G. MATVEEVA, P. I. ROPOT

EXCITATION OF HYPERSOUND BY THE SYSTEM OF INTERDIGITA ELECTRODES IN LITHIUM NIOBATE CRYSTALS FOR WIDEBAND PROCESSING OF SIGNALS

Summary

Non-resonance excitation of longitudinal and shift ultrasound waves in trigonal crystals by the system of interdigita transformers is investigated. Shift ultrasound waves excited in lithium niobate crystals of YZ-cut in a wide frequency range is shown to be used for creation of wideband acousto-optic deflectors, spectrum-analyzers and ultrasound delay-lines of microwave range, for widening the frequency range of devices longitudinal ultrasound waves can be also applied.

УДК 548.4:537.312

А. С. КАРОЛИК

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СУБГРАНИЦ В КОМПАКТНЫХ СУБМИКРОСТРУКТУРАХ

Институт прикладной физики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 08.12.2009)

Введение. Границы зерен являются важной структурной составляющей компактных субмикроструктурных (СМК) и нанокристаллических (НК) материалов, существенно влияющей на их физические и эксплуатационные свойства. Одним из методов формирования ультрамелкозернистой СМК и НК структуры является интенсивная пластическая деформация (ИПД). В отличие от традиционной пластической деформации, она позволяет достичь не только высокой степени, но и высокой однородности деформации, за счет чего удается существенно повысить ресурс прочности и долговечности. Кроме того, ультрамелкозернистая структура в сочетании с высокой плотностью дислокаций в субграницах обеспечивает сочетание повышенной прочности материала с высоким запасом пластичности.

В последнее десятилетие выполнен большой объем исследовательских работ по влиянию ИПД на структуру и свойства СМК материалов [1–5]. Исследовано влияние режимов и степени пластической деформации на прочностные характеристики, структуру, электрические и магнитные свойства [1–3]. С помощью оптической, атомно-силовой и электронной микроскопии проведены исследования изменения кристаллической структуры в процессе отжига при различных режимах термической обработки [5], проводилось численное моделирование структуры границ в СМК материалах [4].

Анализ литературных данных свидетельствует о том, что границы раздела в компактных СМК и НК металлах во многом схожи с границами зерен массивных поликристаллов, однако в отличие от последних они являются преимущественно высокоугловыми, более широкими, содержат высокий уровень внутренних напряжений и повышенную долю свободного избыточного объема [1, 2]. Несмотря на огромный объем проведенных исследований, в литературе практически отсутствуют количественные данные о связи единицы удельной площади границ раздела в СМК и НК материалах с изменением физических свойств, что затрудняет как глубокое понимание происходящих процессов, так и разработку теоретических моделей таких границ.

В работах [6, 7] нами приведены результаты структурных исследований восстановления структуры субмикроструктурных меди и никеля, полученных интенсивной пластической деформацией (РКУ-прессованием с последующей прокаткой), в ходе изохронного отжига по измерениям электросопротивления и термоЭДС. Впервые были получены количественные данные по изменению электросопротивления и термоЭДС на единицу удельной площади границ раздела в СМК структурах. С целью объяснения полученных результатов мы попытались использовать модели границ зерен, ранее разработанные для обычных поликристаллов [8–10]. Однако, эта попытка оказалась безуспешной, не удавалось объяснить знак эффекта для изменения термоЭДС меди.

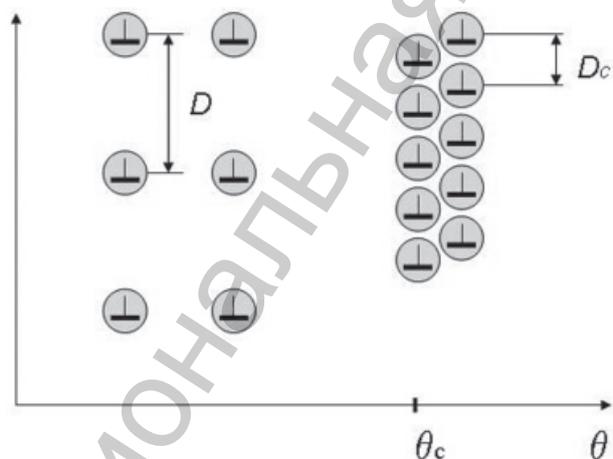
В настоящей работе мы предлагаем модель субграниц в СМК металлических структурах, сформированных при интенсивной пластической деформации, для количественного объяснения результатов, полученных в [6, 7].

Модель субграниц и метод расчета. Формирование ультрамелкокристаллической структуры при ИПД имеет несколько стадий и подчиняется тем же основным закономерностям, которые определяют ее изменение при больших пластических деформациях [11]. Вначале по мере увеличения степени деформации и накоплении плотности дислокаций формируется ячеистая структура, разделенная широкими субграницами, сформированными из хаотически сплетенных дислокаций. С ростом степени деформации субграницы сужаются, ячейки измельчаются и очищаются от дислокаций. Углы разориентировок соседних ячеек также постепенно увеличиваются с ростом степени пластической деформации. На фоне подавляющего большинства малоугловых разориентировок с углами $\theta < 1^\circ$ появляются ячейки, развернутые на углы до нескольких градусов. Однако далее по мере накопления степени деформации появляются границы с высокими углами разориентировки $\theta > 10^\circ$. При достаточно высокой степени истинной деформации подавляющая часть границ имеет высокоугловую разориентировку [12].

Движущей силой этих процессов является уменьшение энергии системы при образовании дислокационных стенок из хаотически распределенных дислокаций, при сближении и слиянии этих стенок в широкие субграницы, а также при сужении широкой субграницы и развороте субзерен на более высокие углы [13].

Ранее нами была предложена модель границ зерен для обычных поликристаллов, хорошо количественно описывающая имеющиеся экспериментальные данные по вкладу границ зерен в электросопротивление и термоЭДС, а также величину энергии границ зерен как функцию угла разориентировки [8–10]. Эта модель позволяла описывать границы как с малым, так и с высоким углом разориентировки. Так, было показано, что в некоторых благородных металлах, в том числе и в меди, малоугловые и специальные границы зерен вносят положительный по знаку вклад в термоэлектродвижущую силу, а высокоугловые границы общего типа – отрицательный. Однако на основе этой модели не удавалось объяснить наблюдаемое изменение термоэлектрических свойств СМК-меди в процессе отжига [6]. В настоящей работе мы несколько модифицировали модель высокоугловой границы с учетом особенностей формирования субграниц при интенсивной пластической деформации.

Будем рассматривать простейшие симметричные границы наклона, в которых плоскость границы параллельна одной из плоскостей симметрии кристалла. На рисунке схематически показана предлагаемая модель субграницы, состоящая из двух наборов дислокаций, отстоящих друг от друга на расстояние D . Полагаем, что, как и в обычных кубических поликристаллах, между расстоянием D и углом разориентировки θ существует связь $D = b_B / 2 \sin(\theta/2) \approx b_B / \theta$, где b_B – величина вектора Бюргера. В качестве b_B принималась величина устойчивого вектора Бюргера, для ГЦК металлов $b_B = \frac{1}{2} \langle 110 \rangle = a_0 / \sqrt{2}$ (a_0 – параметр решетки). С ростом степени деформации растет плотность дислокаций, растет и угол разориентировки субзерен. Дислокации



Модель эволюции дислокационной структуры субграницы с ростом угла разориентировки

в субгранице сближаются вплоть до некоторого критического расстояния D_c . При достаточно близком сближении энергетически выгодным будет слияние дислокаций. Полагаем, что это будет происходить при среднем расстоянии между дислокациями $D < D_c$. В работе [14] показано, что описание зернограницной структуры с помощью решеточных дислокаций, которые сближаются с ростом угла разориентировки, физически корректно и количественно согласуется с результатами электронно-микроскопических измерений вплоть до углов $\theta = 18^\circ$. При этом наблюдаемое минимальное расстояние между дислокациями в границе составляло $3 b_B$. В нашей модели мы полагали сред-

ную величину максимального сближения дислокаций $D_c = (4\div 5)b_B$ в зависимости от степени интенсивности пластической деформации. Величине D_c соответствуют углы разориентировки $\theta_c = 11,5\div 14,3^\circ$.

В качестве модели дислокации использовалась ранее предложенная нами модель, учитывающая как дилатацию решетки в области ядра дислокации, так и существование резонансных квазистационарных состояний вблизи энергии Ферми. Эта модель позволила получить хорошее количественное объяснение вклада дислокаций в электросопротивление широкого круга металлов [9]. В настоящее время можно считать установленным, что основной вклад в электросопротивление, создаваемое дислокациями и их скоплениями, вносят неупругие искажения в области ядер дислокаций [15, 16]. Влияние полей упругих напряжений вокруг дислокаций на электросопротивление очень мало, почти на два порядка ниже [17], поэтому их вкладом мы пренебрегали, также не учитывалось и влияние взаимодействия между дислокациями. Это оправдано тем, что в силу эффектов экранирования электростатическое взаимодействие не оказывает существенного влияния на потенциалы соседних дефектов, отстоящих друг от друга на расстоянии, большем нескольких межатомных.

Транспортное сечение рассеяния Q на дислокациях, составляющих границу зерен, рассчитывалось методом парциальных волн путем решения уравнения Шредингера для потенциала вида [9]:

$$V(r) = \begin{cases} -V_1, & r < R_1; \\ V_0, & R_1 \leq r \leq R_2; \\ 0, & r > R_2. \end{cases} \quad (1)$$

Это простейший по форме потенциал, позволяющий учесть основные особенности искажения решетки в области ядра дислокации. Величина дилатации решетки в области ядра дислокации полагалась равной $\Delta V = b_B^2$ [18]. Она определяла высоту потенциала V_0 через условие экранирования, а также ширину потенциального барьера $R_2 = \sqrt{\Delta V / \pi} = b_B / \sqrt{\pi}$. Внутренний радиус потенциала полагался равным $R_1 = R_2 / 2$, как показано в [19], выбор этого параметра слабо влияет на результаты расчета. Глубина потенциальной ямы V_1 определялась из условия близости резонансного квазистационарного электронного уровня на дислокации к энергии Ферми в пределах теплового разброса. Аналитические выражения для условия экранирования и сечения рассеяния приведены в [19].

Удельное электросопротивление дислокаций в субгранице, отнесенное к единице их плотности N_d в единице объема, рассчитывалось по формуле [9]

$$\frac{\Delta \rho_d}{N_d} = \frac{\hbar k_F \Omega_a Q}{n_s^* e^2}, \quad (2)$$

где k_F – величина волнового вектора на уровне Ферми, в модели свободных электронов $k_F = (3\pi^2 n_s / \Omega_a)^{1/3}$; e – величина заряда электрона; Ω_a – атомный объем; n_s^* – эффективное число носителей тока, участвующее в процессе рассеяния на дефектах решетки. Для одновалентных металлов $n_s^* = n_s = 1$ (n_s – число носителей тока на атом), для переходных металлов с почти заполненной d -оболочкой $n_s^* = n_s / 2$ (для меди $n_s = 1$, для никеля $n_s = 0,42$).

Удельное электросопротивление субграниц в высокоугловой области на единицу их удельной площади при максимальном сближении дислокаций в субгранице до величины D_c можно записать в виде

$$\frac{\Delta \rho_{sg}}{N_{sg}} = \frac{2\Delta \rho_d}{D_c N_d} = \frac{2\hbar k_F \Omega_a Q}{D_c n_s e^2}. \quad (3)$$

Изменение термоЭДС на единицу удельной площади субграниц вычислялось по формуле, известной как соотношение Фриделя, полученной в предположении справедливости правила Маттиссена [20]

$$\frac{\Delta S_{sg}}{N_{sg}} = S_0 \frac{\Delta \rho_{sg} / N_{sg}}{\rho} \left(\frac{\Delta x}{x} - 1 \right), \quad (4)$$

$$\text{где } \rho = \rho_0 + \Delta \rho_{sg}, \quad x = - \left(\frac{d \ln \rho_0}{d \ln \varepsilon} \right)_{\varepsilon = \varepsilon_F} = \frac{S_0 3 e \varepsilon_F}{\pi^2 k_B^2 T}, \quad \Delta x = - \frac{k_F}{2Q} \left(\frac{dQ}{dk} \right)_{k=k_F} + \left(\frac{d \ln F}{d \ln \varepsilon} \right)_{\varepsilon = \varepsilon_F} \equiv \Delta x_Q + \Delta x_F.$$

Здесь S_0 и ρ_0 – соответственно коэффициент абсолютной термоэлектродвижущей силы и удельное электросопротивление отожженного металла при температуре T ; k_B – постоянная Больцмана; ε_F – энергия Ферми; F – площадь поверхности Ферми. Расчеты выполнялись для температуры $T = 300$ К. Условие экранирования обеспечивалось с точностью до 10^{-4} , точность определения параметров резонансного состояния E_r и Γ составляла 10^{-5} . Дальнейшее увеличение точности не влияло на результаты расчета до третьего знака.

Величина Δx_F определялась на основе экспериментальных данных по измерениям размерного термоэлектрического эффекта. Как известно, коэффициент абсолютной термоЭДС можно записать в виде

$$S_0 = - \frac{\pi^2 k_B^2 T}{3 e \varepsilon_F} \left(\frac{d \ln \lambda}{d \ln \varepsilon} + \frac{d \ln F}{d \ln \varepsilon} \right)_{\varepsilon_F} \equiv - \frac{\pi^2 k_B^2 T}{3 e \varepsilon_F} (U + V), \quad (5)$$

где λ – длина свободного пробега электронов. По данным измерения размерного термоэлектрического эффекта, выполненного на фольгах или тонких пленках, можно определить величины U и V . Наиболее надежными считаются измерения размерного эффекта, выполненные на фольгах. Из имеющихся в литературе данных для меди, приведенных в [21], наиболее надежным представляется значение $V = \Delta x_F = -1,20$, полученное для медных фольг. Для никеля в [21] приведено только значение $U = 19$, полученное по измерениям на тонких пленках. Зная величину абсолютного коэффициента термоЭДС для никеля при $S_0 = -19,52$ мкВ/К при $T = 300$ К и величину энергии Ферми в модели почти свободных электронов $\varepsilon_F = 4,91$ эВ, получаем для никеля $V = \Delta x_F = -5,87$.

Результаты расчета. Сравнение с экспериментом. Рассчитанные величины изменения удельного электросопротивления и добавочной термоЭДС высокоугловых субграниц на единицу их удельной площади представлены в таблице для двух значений критического расстояния между дислокациями в субгранице $D_c = 5 b_B$ (верхняя строчка) и $D_c = 4 b_B$ (нижняя строчка). В работе [6] приведены результаты измерений изменения термоЭДС в процессе отжига субмикроструктурной меди (99,98% Cu) после интенсивной пластической деформации до истинной степени деформации $e = 2,8$, которые показали среднее изменение термоЭДС на единицу удельной площади границ $\Delta S_g / N_g = (2,3 \pm 0,5) \cdot 10^{-3}$ нВ·см/К. Результаты измерений изменения электросопротивления и термоЭДС никеля (99,98% Ni) в процессе отжига после ИПД до истинной деформации $e = 2,4$ в сочетании с металлографическими исследованиями, приведенные в работе [7], показали среднее изменение электросопротивления и термоЭДС на единицу удельной площади границ соответственно $\Delta \rho_g / N_g = (9,6 \pm 2,4) \cdot 10^{-3}$ нОм·см² и $\Delta S_g / N_g = (33 \pm 7) \cdot 10^{-3}$ нВ·см/К. В оценке погрешности измерения учитывались погрешность измерения термоЭДС (5%), погрешность измерения электросопротивления (10%) и погрешность измерения среднего диаметра зерен методом случайных секущих (15%).

Очевидно, что результаты расчета вполне удовлетворительно согласуются с результатами измерений, причем величина $\Delta S_g / N_g$ для меди наиболее близка к результатам расчета, соответствующим большей степени пластической деформации (нижняя строчка при $D_c = 4 b_B$), а результаты измерения для никеля оказались наиболее близки к результатам расчета, соответствующим менее высокой истинной степени деформации (верхняя строчка).

Входные параметры расчета, а также рассчитанные значения остаточного электросопротивления и добавочной термоЭДС единицы удельной площади высокоугловых субграниц, сформированных при ИПД

Параметры Металл	$a_0, \text{Å}$	$\rho_0,$ мкОм·см [21]	$S_0,$ мкВ/К [21]	$\Delta\rho_{sg} / N_{sg},$ 10^{-12} Ом·см^2	$\Delta S_{sg} / N_{sg},$ 10^{-12} В·см/К
Cu	3,61	1,72	1,85	2,70 3,37	1,92 2,40
Ni	3,52	7,24	-19,52	8,61 10,76	35,71 44,64

Следует отметить, что расчеты остаточного электросопротивления субграниц в СМК материалах надо бы сравнивать с результатами измерений, выполненных при достаточно низких температурах (~ 4,2 К), но пока таких измерений нет в литературе, либо они нам не известны. Наши же измерения проводились при комнатной температуре. Однако их можно достаточно грубо сравнивать с результатами расчета, так как измерение электросопротивления выполнялось дифференциальным методом, и в первом приближении мы отстраивались от влияния температуры (в исследуемом и реперном образцах температурные составляющие сопротивления были практически одинаковы).

Таким образом, предложенная модель дислокационных высокоугловых субграниц в субмикроструктурных структурах достаточно хорошо количественно объясняет наблюдаемые изменения как электросопротивления, так и термоэлектродвижущей силы в процессе отжига после интенсивной пластической деформации в меди и никеле, как по величине, так и по знаку термоэлектрического эффекта.

Литература

1. Гусев А. И., Ремпель А. А. Нанокристаллические материалы. М., 2001.
2. Валиев Р. З., Александров И. В. Наноструктурные материалы, полученные интенсивной пластической деформацией. М., 2000.
3. Tjong S. C., Chen H. // Mater. Scien. Engineer. R 2004. Vol. 45. P. 1–88.
4. Van Swygenhoven H., Farkas D., Caro A. // Phys. Rev. B 2000. Vol. 62. P. 831–838.
5. Чувильдеев В. Н., Копылов В. И., Нохрин А. В. и др. // ФММ 2003. Т. 96, № 5. С. 51–60.
6. Каролик А. С., Копылов В. И., Шарандо В. И. // Деформация и разрушение материалов. 2008. № 12. С. 22–29.
7. Каролик А. С., Шарандо В. И., Копылов В. И. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 4. С. 112–117.
8. Каролик А. С. // ФММ 1993. Т. 75, вып. 4. С. 34–41.
9. Karolik A. S., Luhvich A. A. // J. Phys.: Condens. Matter. 1994. Vol. 6. P. 873–886.
10. Каролик А. С. // ФММ. 1999. Т. 88, вып. 2. С. 32–37.
11. Рыбин В. В. Большие пластические деформации и разрушение металлов. М., 1986.
12. Копылов В. И., Макаров И. М., Нестерова Е. В., Рыбин В. В. // Вопросы материаловедения. 2002. № 1. С. 273–277.
13. Новиков И. И. Теория термической обработки металлов. М., 1974.
14. Krakow W., Smith D. A. // Trans. Japan Inst. Metals. 1986. Vol. 27. Suppl. P. 277–284.
15. Brown R. A. // J. Phys.: Condens. Matter. 1977. Vol. 7. P. 1283–1295; // Can. J. Phys. 1982. Vol. 60. P. 766–778.
16. Trattner D., Zehetbauer M., Gröder V. // Phys. Rev. B 1985. Vol. 31. P. 1172–1173.
17. Stehle H., Seeger A. // Zeit. Phys. 1956. Vol. 146. S. 217–268.
18. Шматов В. Т. // ФММ. 1975. Т. 40, вып. 5. С. 910–919.
19. Karolik A. S. // J. Phys.: Condens. Matter. 2001. Vol. 13. P. 1093–1102.
20. Блатт Ф., Шредер П., Фойлз К., Грейг Д. Термоэлектродвижущая сила металлов. М., 1980.
21. Landolt-Börnstein. Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology. Metals: Electronic Transport Phenomena. Vol. 15. Berlin, 1982.

A. S. KAROLIK

ELECTRIC PROPERTIES OF SUBBOUNDARIES IN COMPACT SUB-MICROSTRUCTURES

Summary

The model of high-angle subboundary in compact submicrocrystalline structures obtained by severe plastic deformation is proposed. The subboundary was represented by the double dislocation wall. On the basis of this model using the earlier proposed dislocation model the contribution of the specific area of subboundaries to electrical resistivity and thermoelectric power of copper and nickel is calculated by the partial-wave method. Calculation results are compared with the data of the earlier performed measurements of the resistivity and thermopower change per unit specific area of boundaries in the process of isochronous annealing of submicrocrystalline copper and nickel after severe plastic deformation. The good agreement for the thermoelectric power and the satisfactory agreement for electrical resistivity are obtained.

УДК 538.945

В. Н. КУШНИР, С. Л. ПРИЩЕПА

МАГНИТНЫЕ НЕОДНОРОДНОСТИ И РЕЗИСТИВНЫЙ ПЕРЕХОД В НАНОСТРУКТУРАХ СВЕРХПРОВОДНИК / ФЕРРОМАГНЕТИК / СВЕРХПРОВОДНИК

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

(Поступила в редакцию 12.02.2010)

Сверхпроводимость в структурах с чередующимися слоями сверхпроводника (S) и ферромагнетика (F), или нормального металла, обусловлена эффектом близости, т. е. индуцированием сверхпроводящего конденсата в несверхпроводящих слоях в силу их контакта с S-слоями [1]. Плотность куперовских пар в несверхпроводящем материале убывает по мере удаления от поверхности контакта. В ферромагнетике быстрота этого убывания обусловлена главным образом обменным взаимодействием. Кроме того, обменное взаимодействие приводит к пространственным осцилляциям конденсатной волновой функции, поскольку куперовские пары приобретают в ферромагнетике ненулевой импульс из-за расщепления энергии пары на величину $2E_{ex}$ (E_{ex} – величина обменного потенциала). В результате сверхпроводящее критическое состояние может реализоваться, в зависимости от микроскопических и геометрических параметров, в двух термодинамических состояниях: либо в «0-состоянии» с критической температурой T_{c0} , либо в « π -состоянии» с критической температурой $T_{c\pi}$ [1]. Для зеркально симметричных S/F/S-структур 0- и π -состояниям соответствуют симметричная и антисимметричная волновая функция соответственно. Осцилляции конденсатной волновой функции проявляются, в частности, в осциллирующей зависимости критической температуры T_c от толщины F-слоя d_F [2]. При этом 0- и π -состояниям соответствуют различные сегменты зависимости $T_c(d_F) = \max\{T_{c0}(d_F), T_{c\pi}(d_F)\}$, так что кривая $T_c(d_F)$ оказывается немонотонной и негладкой в точке кроссовера состояний d_F^* . Существование π -состояний и другие нетривиальные свойства S/F/S-структур обуславливают перспективу их применения в нанoeлектронике и спинтронике [3].

Период пространственных осцилляций волновой функции в ферромагнетике определяется

характерной длиной $\zeta_F = \sqrt{\frac{\hbar D_F}{E_{ex}}} = \sqrt{\frac{\hbar v_F \ell_F}{3E_{ex}}}$, где D_F , v_F и ℓ_F – коэффициент диффузии, скорость

Ферми и длина свободного пробега электрона в ферромагнетике соответственно. Ввиду неравенства $E_{ex} \gg T_c$, которое удовлетворяется для большинства экспериментальных S/F-структур, зависимость $T_c(d_F)$ чувствительна к малым вариациям величины E_{ex} . Малые изменения обменной энергии могут иметь место в одном образце в силу неоднородности свойств ферромагнитного слоя.

С целью исследования зависимости критической температуры сверхпроводящего перехода как функции толщины слоя ферромагнетика, $T_c(d_F)$, была сформирована следующая серия образцов. Трехслойные структуры типа S/F/S осаждались на Si(100) подложки методом катодного распыления при постоянном токе. При этом использовался подвижный держатель образцов, позволяющий за один вакуумный цикл осадить до восьми образцов с разными толщинами элементов. В качестве материала сверхпроводника использовался ниобий, в качестве материала ферромагнетика – сплав $Cu_{1-x}Ni_x$. Концентрация никеля определялась методом электронной дисперсионной спектроскопии (EDS) и методом Резерфордского обратного рассеяния (ROP). Оба метода показали одинаковый результат: концентрация никеля в пленках равнялась концентрации нике-

ля в распыляемой мишени с точностью 3%: $\text{Cu}_{0,41}\text{Ni}_{0,59}$. Сплав $\text{Cu}_{1-x}\text{Ni}_x$ представляет собой слабый ферромагнетик, в котором магнетизм контролируется через содержание Ni. Для данной концентрации Ni температура Кюри составляет $T_{\text{Curie}} \approx 220$ К и магнитный момент на атом $\mu_{\text{at}} \approx 0,12\mu_{\text{B}}/\text{at}$ [4]. Кроме того, известно, что в пленках $\text{Cu}_{0,41}\text{Ni}_{0,59}$ формируются кластеры никеля с характерными размерами 10–15 нм [5]. В силу этого возможны вариации магнитного момента в плоскости пленки.

Толщина ниобия была фиксированной и составляла 14 нм. Толщина ферромагнетика изменялась в диапазоне от 0,5 до 15 нм. Для исключения окисления и деградации верхнего слоя сверхпроводника на поверхность сформированной структуры в едином вакуумном цикле осаждалась тонкая (1 нм) пленка алюминия. После контакта с атмосферой алюминий прокислялся естественным образом на всю глубину и поэтому не влиял на сверхпроводящие свойства верхнего электрода. Начальное давление в вакуумной камере составляло 10^{-9} Торр, парциальное давление аргона в процессе распыления – 4×10^{-3} Торр. Скорость осаждения, определенная по кварцевому датчику, составляла 0,1 нм/с для ниобия и 0,04 нм/с – для ферромагнетика. Критическая температура одной пленки ниобия толщиной $d_{\text{Nb}} = 28$ нм составляла $T_{\text{CS}} = 8,55$ К.

Резистивные характеристики $R(T)$ сверхпроводящих переходов для образцов $\text{Nb}/\text{Cu}_{0,41}\text{Ni}_{0,59}/\text{Nb}$ измерялись в криостате ^4He с использованием стандартной четырехзондовой методики при постоянном токе. Характерный размер образцов 1 см \times 2 мм. Переходы образцов с $d_{\text{CuNi}} > 8$ нм и $d_{\text{CuNi}} < 2$ нм представляли обычные резкие кривые с шириной перехода менее 0,1 К [6]. Однако, для толщин $2 \text{ нм} < d_{\text{CuNi}} < 8$ нм кривые $R(T)$ были уширены (рис. 1). Ширина перехода ΔT_c , определенная как разность между температурой, при которой сопротивление образца составляет 90% от сопротивления при 10 К и температурой, при которой сопротивление образца составляет 10% от этого же значения, $\Delta T_c = T_c(90\%) - T_c(10\%)$, увеличивалась до 0,6 К [6]. Уширение резистивных кривых означает уширение фазового перехода в сверхпроводящее состояние. Температуру $T_c(10\%)$ можно рассматривать как температуру, при которой устанавливается истинное сверхпроводящее состояние. Измеренная зависимость $T_c(10\%)$ от d_{F} показана на рис. 2 открытыми квадратами. Также на рис. 2 мы приводим теоретическую зависимость $T_c(d_{\text{F}})$, рассчитанную в рамках формализма уравнений Узалея [7] методом, изложенным в [8, 9]. Для расчетов использовались параметры, приведенные в работе [4] для $\text{Nb}/\text{Cu}_{0,41}\text{Ni}_{0,59}$ бислойных структур. Полученная зависимость $T_c(d_{\text{F}})$ состоит из двух ветвей, которые соответствуют 0-состоянию (сплошная линия) и π -состоянию (пунктирная линия). Из рис. 2 видно, что 0-состояние реализуется для толщин $d_{\text{CuNi}} \leq 4$ нм, а π -состояние устанавливается в диапазоне $d_{\text{CuNi}} \sim 4$ –12 нм. Таким образом, в наших образцах реализуется хорошо известный 0– π кроссовер [1].

На рис. 3 показаны экспериментальные зависимости от d_{F} для $T_c(90\%)$ (закрытые кружки) и для $T_c(10\%)$ (открытые квадраты). Видно, что зависимость $T_c(90\%)$ от d_{F} имеет несколько

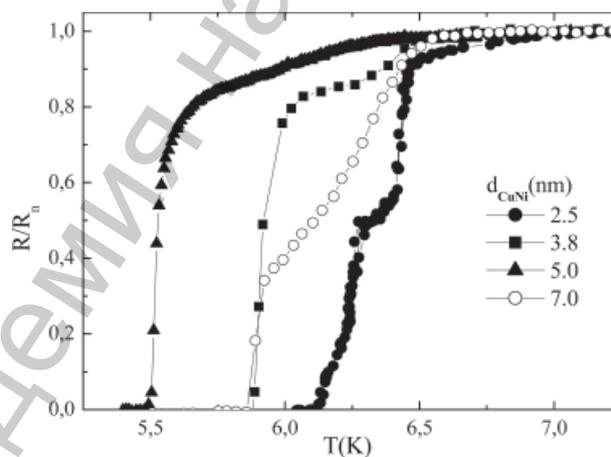


Рис. 1. Характерные зависимости $R(T)$ для трехслоек $\text{Nb}/\text{Cu}_{0,41}\text{Ni}_{0,59}/\text{Nb}$ и в диапазоне толщин $2 \text{ нм} < d_{\text{F}} < 7$ нм

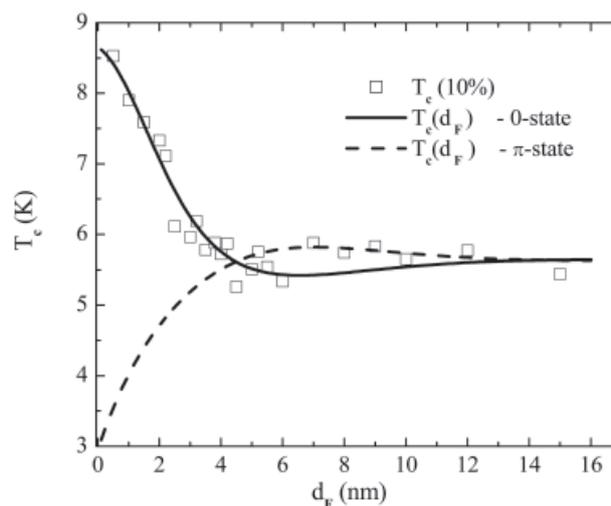


Рис. 2. Зависимость $T_c(d_{\text{F}})$, измеренная по критерию 10% (открытые квадраты), и рассчитанные зависимости $T_c(d_{\text{F}})$ в диффузионном пределе (линии)

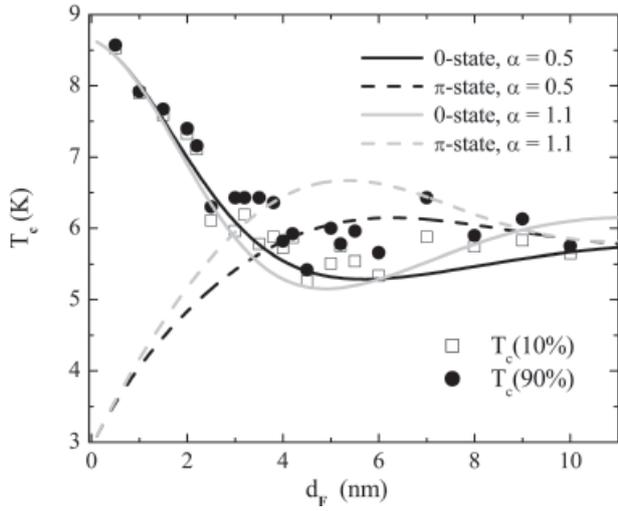


Рис. 3. Зависимости $T_c(d_F)$, измеренные по критерию 10% (открытые квадраты) и 90% (закрытые точки) вместе с рассчитанными зависимостями $T_c(d_F)$ для кластеров никеля (линии)

ферромагнетика F_{cl} с более сильным обменным потенциалом $E_{ex, cl}$, чем усредненное значение E_{ex} в F слое. Поскольку размер в плане этих кластеров больше толщины, то в определенных местах структуры $S/F/S$ слои S оказываются связанными друг с другом через более сильный ферромагнетик, формируя структуру $S/F_{cl}/S$. Параметры этих новых структур отличаются от параметров остальной $S/F/S$ трехслойки. В частности, они обладают локальной критической температурой $T_{c,cl}(d_F)$. Феноменологически возможно оценить зависимость $T_{c,cl}(d_F)$ с использованием теории Тагирова [11, 12].

Тагировым показано [11] (см. также [12]), что диффузионный предел микроскопической теории не полностью адекватен при рассмотрении структур S/F с сильным ферромагнетиком (таким мы считаем кластер Ni). Это связано с тем, что характерная длина затухания конденсатной

волновой функции в ферромагнетике $\zeta_F = \sqrt{\frac{\hbar D_F}{E_{ex}}} = \sqrt{\frac{\hbar v_F \ell_F}{3E_{ex}}}$ становится сравнимой или мень-

шей, чем длина свободного пробега электрона ℓ_F ; следовательно, условие применения уравнений диффузионного предела нарушается. В [11] было предложено для описания структур с ферромагнетиком S/F , обменная энергия которого такова, что $\ell_F \sim \zeta_F$, учесть первую поправку к уравнениям диффузионного предела. Это сводится, как оказалось [11–15], к «перенормировке» коэф-

фициента диффузии $D_F \rightarrow D_F^\pm = \frac{D_F}{1 \pm i\alpha \operatorname{sgn} \omega}$ в уравнениях Узаделя, описывающих сверхпрово-

дящий конденсат в ферромагнетике:

$$\left(|\omega| \pm iE_{ex} - \frac{\hbar D_F^\pm}{2} \partial_{\mathbf{r}}^2 \right) \mathcal{F}^\pm(\omega; \mathbf{r}) = 0.$$

Здесь параметр $\alpha \equiv \ell_F / 5\xi_{F,m}$, где $\xi_{F,m} \equiv \frac{\hbar v_F}{2E_{ex}}$ – длина магнитной жесткости в кластере; $\omega = \pi k_B T (2n + 1)$, где $n = 0, \pm 1, \dots$ – мацубаровские частоты; $\mathcal{F}^\pm(\omega; \mathbf{r})$ – аномальные функции Грина в диффузионном пределе. Вычисления, проведенные в [11–15], показали, что уточненные таким образом уравнения диффузионного предела адекватно описывают существующие экспериментальные данные.

хаотический и осциллирующий характер. Такое поведение $T_c(90\%)$ от d_F вместе с уширением фазового перехода свидетельствует о неоднородности сверхпроводящих образцов. Подобные зависимости $T_c(d_F)$ наблюдались также и в работе [10] на структурах $Nb/Cu_{0,43}Ni_{0,57}$. В нашем случае под неоднородностью образцов мы в первую очередь понимаем неоднородность ферромагнитного слоя. Кластеризация никеля вносит существенный вклад в уширение фазового перехода. Помимо этого, на уширение резистивных характеристик вблизи точки кроссовера d_F^* также влияет и шероховатость S/F границ [6].

Рассмотрим влияние кластеров никеля на резистивные характеристики трехслоек $Nb/Cu_{0,41}Ni_{0,59}/Nb$ при $d_{CuNi} < 10$ нм. Существование кластеров никеля диаметром до 15 нм в пленках $CuNi$ [5] означает, что в слое ферромагнетика F имеются закоротки из другого

Результаты расчетов для двух значений $\alpha \approx 0,5$ и $\alpha \approx 1,1$ приведены на рис. 3. Указанные значения α были выбраны исходя из соображений охвата всего диапазона экспериментальных данных. Физический смысл изменения α , на наш взгляд, связан в первую очередь с изменением обменной энергии из-за присутствия кластеров Ni. Из полученных результатов следует, что зависимость $T_c(d_F)$ чувствительна к вариации концентрации Ni вдоль слоя вблизи толщины d_F , соответствующей сверхпроводящему π -состоянию и вблизи точки кроссовера из 0- в π -состояние.

Литература

1. Buzdin A. I. // Rev. Mod. Phys. 2005. Vol. 77, N. 3. P. 935–976.
2. Obi Y., Ikebe M., Fujishiro H. // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 94, N. 5. P. 057008 (4).
3. Žutič I., Fabian J., Das Sarma S. // Rev. Mod. Phys. 2004. Vol. 76, N. 2. P. 323–410.
4. Rusanov A., Boogaard R., Hesselberth M. et al. // Physica C. 2002. Vol. 369. P. 300–303.
5. Iannone G., Zola D., Angrisano Armenio A. et al. // Phys. Rev. B. 2007. Vol. 75, N. 6. P. 064409(6).
6. Prischepa S. L., Cirillo C., Bell C. et al. // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 88, № 6. С. 431–435.
7. Usadel K. // Phys. Rev. Lett. 1970. Vol. 25, N 8. P. 507–509.
8. Kushnir V. N., Prischepa S. L., Cirillo C., Attanasio C. // European Physical Journal B. 2006. Vol. 52, N 1. P. 9–14.
9. Кушнир В. Н. // Докл. НАН Беларуси. 2008. Т. 52, № 2. С. 39–42.
10. Рязанов В. В., Обознов В. А., Прокофьев А. С., Дубонос С. В. // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 77, № 1. С. 43–47.
11. Tagirov L. R. // Physica C. 1998. Vol. 307. P. 145–163.
12. Vodopyanov B. P., Tagirov L. R., Durusoy H. Z., Berezhnov A. V. // Physica C. 2001. Vol. 366. P. 31–42.
13. Khusainov M. G., Proshin Yu. N. // Phys. Rev. B. 1997. Vol. 56. P. R14283–R14286.
14. Fominov Ya. V., Chitchevkatchev N. M., Golubov A. A. // Phys. Rev. B. 2002. Vol. 66. N 1. P. 014507(13).
15. Фоминов Я. В., Куприянов М. Ю., Фейгельман М. В. // УФН. 2003. Т. 173, № 1. С. 113–115.

V. N. KUSHNIR, S. L. PRISCHEPA

MAGNETIC INHOMOGENEITIES AND THE RESISTIVE TRANSITION IN THE SUPERCONDUCTOR / FERROMAGNET / SUPERCONDUCTOR NANOSTRUCTURES

Summary

The effect of inhomogeneities of ferromagnet layers on the superconducting phase transition of superconductor/ferromagnet/superconductor trilayer nanostructures Nb/Cu_{0.41}Ni_{0.59}/Nb is studied. For this purpose, we have analyzed the critical temperature T_c and the resistive transition as a function of ferromagnet layer thickness d_F . It is shown that the $T_c(d_F)$ dependence is sensible to the variation of Ni concentration along the F-layer for the thickness d_F corresponding to the π -superconducting state and to the 0-state – π -state crossover point.

ІНФАРМАТЫКА

УДК 612.172.4

М. В. ВОЙТИКОВА, А. П. ВОЙТОВИЧ, А. Г. МРОЧЕК

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ДИАГНОСТИКА МЕРЦАТЕЛЬНОЙ АРИТМИИ И ТРЕПЕТАНИЯ ПРЕДСЕРДИЙ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА НЕЗАВИСИМЫХ КОМПОНЕНТ

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 07.05.2010)

Предложен новый метод дифференциальной диагностики фибрилляции предсердий (ФП), флаттера предсердий (ФлП) на основе вейвлет-анализа и анализа независимых компонент, пригодный для выделения сигналов предсердной электрической активности с почти гауссовым распределением. Статистика высоких порядков используется для разделения предсердной и желудочковой составляющей, подавления шума и артефактов, в частности, из ЭКГ исключается составляющая, ассоциированная с активностью желудочков сердца, и далее вычисляется спектр мощности сигнала предсердной активности, доминантная частота и спектральная плотность в области частот 3–8 Гц. Если спектральная плотность доминантной частоты превышает значение 50%, то делается вывод о наличии трепетания предсердий, а если меньше 50% – о наличии фибрилляции предсердий.

Введение. Мерцательная аритмия (МА) (другое название – фибрилляция предсердий) является наиболее частой формой наджелудочковых нарушений сердечного ритма. Заболевание МА наблюдается у 10% населения старше 70 лет и у пациентов с нарушением сердечного ритма ФП встречается в 1/3 случаев [1]. ФП является разновидностью наджелудочковой аритмии, которая характеризуется хаотической (несинусовой) электрической активностью предсердий, при которой в атриовентрикулярный узел из предсердий поступают частые нерегулярные серии импульсов, часть которых блокируется, а другая часть достигает миокарда желудочков, вызывая аритмические сокращения сердца. В результате хаотическая электрическая деятельность предсердий приводит к ухудшению сократительной функции миокарда и уменьшению сердечного выброса.

Под термин МА часто ошибочно подпадают две различные с патофизиологической точки зрения формы аритмии: собственно фибрилляция предсердий и трепетание предсердий (ТП) (другое название – предсердный флаттер (ФлП)). Клиническая значимость дифференциальной диагностики ФП и ТП обусловлена тем, что для их коррекции требуются разные методы лечения: фармакологические, электрофизиологические, интервенционные или хирургические.

На электрокардиограмме (ЭКГ) характерным признаком ФП является замещение нормальных *P*-волн быстрыми осцилляциями или волнами фибрилляции различных форм и частотных составляющих (*F*-волны). При ТП циркуляция возбуждения идет по большому кругу «re-entry», охватывающего одно или два предсердия. Механизм «re-entry» при ТП был верифицирован в работе [2]. Типичное ТП – это более организованное нарушение ритма по сравнению с ФП, которое характеризуется наличием *F*-волн типа «зубьев пилы», отчетливо выраженных в грудных отведениях ЭКГ. ТП обычно сочетается с АВ-блокадой в соотношении 2:1, что приводит к сокращению желудочков сердца с частотой 120–160 уд/мин.

Для дифференциальной диагностики ФП и ТП у больных, как правило, определяют форму *F*-волн в грудных отведениях ЭКГ, снятой в 12 стандартных отведениях. При наличии нерегу-

лярного сердечного ритма, тахикардии (частота сердечных сокращений выше 100 уд/мин) и быстрых F -волн различной формы и частоты на месте P -волн, диагностируется ФП, а при наблюдении регулярных F -волн типа «зубьев пилы» с частотой от 3 до 8 Гц, диагностируется ТП.

Для исключения риска неоправданного применения электрокардиостимуляции, требуется надежный метод дискриминации ФП/ТП для разделения пациентов по типу заболевания предсердных аритмий (рис. 1). Традиционные методы дискриминации ФП/ТП используют характерный признак ТП в ЭКГ пациента, при котором наблюдается более регулярный и менее сложный ритм, чем при ФП. Как правило, эти методы используют несколько статистических параметров variability ритма сердца (BPC) для измерения сложности и регулярности ритма сердца при предсердных аритмиях [3]. Например, при ФП последовательность RR -интервалов (временные промежутки между последовательными R -волнами в ЭКГ пациента, рис. 1) имеет большее стандартное отклонение и меньшую корреляцию, чем при нормальном ритме, поэтому значения стандартного отклонения, автокорреляционной функции и гистограмму RR -интервалов используют для идентификации ФП. Однако, для определения отличий ФП от других видов аритмий указанных выше параметров недостаточно.

Вычитание из ЭКГ усредненного QRS-T комплекса – это традиционный подход получения остаточного сигнала атриальной активности из поверхностной кардиограммы. Данный метод предполагает, что атриальная и желудочковая активность являются независимыми и комплекс QRS-T имеет регулярную морфологию. Усреднение последовательных комплексов QRS-T создает некий образец, который после выравнивания во времени и вычисления амплитуды, вычитается из каждого кардиоцикла в записи ЭКГ [4]. Главные недостатки такого подхода – чувствительность к изменениям морфологии, неспособность подавить артефакты, а также невозможность учета пространственного разнообразия многоэлектродных записей.

В настоящее время для дифференциальной диагностики ФП/ТП предложен способ выделения предсердной составляющей ЭКГ путем анализа независимых компонент и анализа частотного спектра предсердной составляющей сигнала ЭКГ в 12 отведениях [5] с выделением предсердной электрической активности методом независимых компонент и вычислением параметров спектра Фурье остаточного сигнала. Диагностика ФП/ТП проводится при наблюдении спектральных паттернов, соответствующих данным типам аритмии. Однако метод независимых компонент [5] малоэффективен при выделении нескольких источников, для которых характерно нормальное распределение. Как показывают расчеты, распределение сигнала, ассоциированного с предсердной составляющей ЭКГ, близко к распределению Гаусса. Кроме того, в анализируемом диапазоне частот помимо предсердной активности может присутствовать пик, соответствующий частоте сердечных сокращений и его высшие гармоники, а также компоненты спектра, присутствие которых связано с ограничением длительности ЭКГ сигнала.

В настоящей работе предложена дифференциальная диагностика ФП/ТП в 12(8)-электродном сигнале ЭКГ на основе анализа независимых компонент, пригодного для выделения сигналов предсердной электрической активности с почти гауссовым распределением. Сигнал ЭКГ пред-

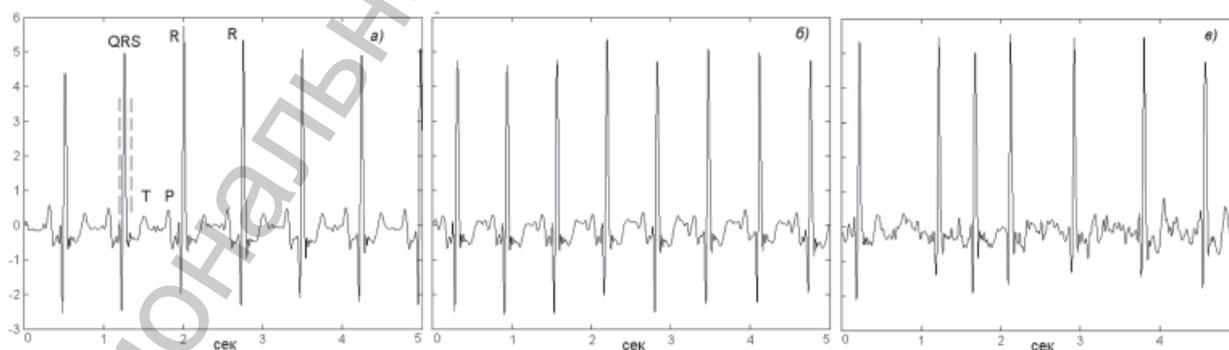


Рис. 1. Пример ЭКГ (образец 08215 из «The MIT-BIH Atrial Fibrillation Database» [7]) с эпизодами нормального ритма (а), флаттера предсердий (б) и фибрилляции предсердий (в)

варительно подвергается вейвлет-преобразованию, поскольку такое преобразование, во-первых, эффективно удаляет шум, который препятствует качественному разделению источников (распространенные алгоритмы анализа независимых компонент FASTICA и INFOMAX наиболее чувствительны к шуму). Во-вторых, вейвлет-преобразование увеличивает параметр негауссовости сигнала (т. е. степень удаленности распределения сигнала от распределения Гаусса), по величине которого идет поиск независимых источников. Статистика высоких порядков в анализе независимых компонент используется для разделения предсердной и желудочковой составляющей, подавления шума и артефактов, в частности, из ЭКГ исключается составляющая, ассоциированная с активностью желудочков сердца, и далее вычисляется спектр мощности сигнала предсердной активности, доминантная частота и ее спектральная плотность в области частот 3–8 Гц. Реализация такого метода диагностики в клинической практике позволит выбирать наиболее адекватное лечение пациентов с аритмическими заболеваниями за счет применения более совершенного метода выделения сигнала, ассоциированного с электрической активностью предсердий, и количественного анализа спектра этого сигнала.

Применение методов вейвлет-анализа и анализа независимых компонент к многоканальным ЭКГ. В работе использовались медицинские записи 12- и 8-канальных ЭКГ, полученные из базы данных [6], представляющие собой записи ЭКГ пациентов с эпизодами пароксизма ФП, ФЛП и синусового ритма и РНПЦ «Кардиология», база данных ЭКГ, г. Минск [7]. Использовались 12-электродные образцы ЭКГ из базы данных [6] длительностью 10–40 сек с частотой дискретизации 250 Гц и 10–20 сек 8-электродные образцы ЭКГ, снятые при помощи цифрового электрокардиографа «Интекард» с частотой квантования 1000 Гц. ЭКГ фильтровались при помощи непрерывного вейвлет-преобразования на основе ортогонального вейвлета Добеши (db8) [8, 9], которое использовалось из расчета адекватной передачи локальных особенностей сигнала ЭКГ.

После вейвлет-фильтрации сигнал ЭКГ обрабатывался методом анализа независимых компонент (в работе применялся алгоритм, известный под названием RobustICA [10]), с использованием пошаговой оптимизации матрицы ковариации сигналов и дискриминации источников по величине куртосиса – момента 4-го порядка, который является мерой негауссовости искомым источников. На выходе получаются отдельные сигналы, соответствующие электрической активности предсердий и желудочков, а также шуму и/или артефактам (мышечной активности, например). На рис. 2 представлен пример выделения 6 независимых источников электрической активности сердца путем анализа 6 грудных отведений V1–V6 для 10 сек ЭКГ больного с трепетанием предсердий. Источник Y1 содержит атриальную составляющую сигнала ЭКГ, которая представляет собой организованную волну возбуждения, охватывающую одно или два предсердия; источники Y4–Y5 – желудочковую составляющую, Y6 – артефакт, остальные источники представляют собой смесь шума, желудочковой и атриальной составляющей сигнала ЭКГ.



Рис. 2. ЭКГ в 6 грудных отведениях V1–V6, больного K001 из [7] с трепетанием предсердий; источники Y1–Y6 выделены методом анализа независимых компонент.

Для автоматического разделения источников удобно выстраивать выделенные источники в порядке возрастания численного значения куртосиса – величины момента 4-го порядка полученных временных рядов Y1–Y6, который определяется по формуле:

$$k(Y) = (E\{Y^4\} - 2E^2\{Y^2\}) / \sqrt{E\{Y^2\} / E^2\{Y^2\}},$$

где $E\{\cdot\}$ – обозначение математического ожидания для временного ряда Y . Так, на рис. 2 сравниваются исходные ЭКГ сигналы с выделенными независимыми источниками Y1–Y6, расположенными сверху вниз по величине возрастания куртосиса (амплитуда источников Y1–Y6 нормирована).

Источник Y1 с минимальным значением куртосиса ($k(Y1) = -0,4$) предположительно ассоциирован с электрической активностью предсердий. Нулевое значение куртосиса (которое означает гауссово распределение временного ряда) свидетельствует о том, что данный источник вероятно является шумом (источник Y3), а высокие значения куртосиса характерны для желудочковой активности (источники Y4–Y5). На рис. 3 приводятся графики распределения (гистограммы) 6 выделенных источников со значением величины куртосиса $k(Y1)$. Знак $k(Y1)$ может служить дополнительным маркером типа аритмии: отрицательные значения $k(Y1)$ характерны для трепетания предсердий, положительные значения, как будет показано ниже, – для сигналов ЭКГ с фибрилляцией предсердий.

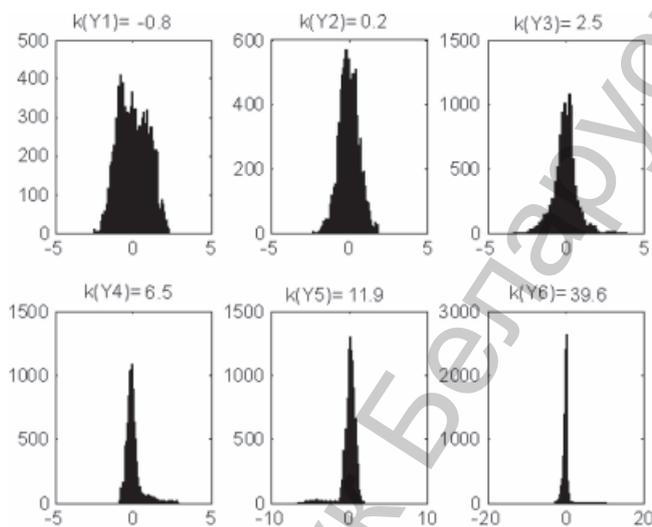


Рис. 3. Гистограмма (распределение) источников Y1–Y6 со значениями куртосиса $k(Y1) - k(Y6)$

Помимо выделения атриальной составляющей ЭКГ метод можно использовать как способ подавления шума и артефактов, путем зануления соответствующих источников при обратном преобразовании и восстановлении сигнала ЭКГ в каждом отведении. На рис. 4 показан пример удаления из грудных отведений V1–V6 ЭКГ не только шума и артефактов, но и желудочковой составляющей сигнала. Полученные сигналы aV1–aV6 представляют собой атриальную составляющую каждого из грудных отведений.

Диагностическую ценность представляет собой спектр мощности $P_A(f)$ сигнала Y1, ассоциированного с предсердной активностью. Поскольку анализируемый сигнал ЭКГ больного K001 записан с частотой квантования $f_s = 1000$ Гц, удобно применить метод Уэлча с 8192-точечным быстрым Фурье-преобразованием в 4096-точечном окне Хэмминга с 50%-ным перекрытием. Для данных параметров определим спектр мощности $P_A(f)$ как функцию частоты f , который несет диагностическую информацию для дискриминации типа аритмии в полосе частот 1–25 Гц. В интервале частот 3–8 Гц, ассоциированной с электрической активностью предсердий, определим доминантную частоту спектра f_p и спектральную плотность $S(f_p)$ по формуле:

$$S(f_p) = \frac{\sum_{0,82f_p}^{1,17f_p} P_A(f_i)}{\sum_0^{0,5f_s} P_A(f_i)}$$

Форма спектра, доминантная частота и спектральная плотность являются основными диагностическими признаками типа предсердной аритмии.

Очевидно, что при флаттере предсердий с установлением циркуляции возбуждения в предсердиях по одному большому кругу «re-entry», охватывающего одно или два предсердия, следует ожидать появления одного доминантного пика с высокой (более 50%) спектральной плотностью $S(f_p)$. В этом случае единственный доминантный пик соответствует частоте волны «re-entry».

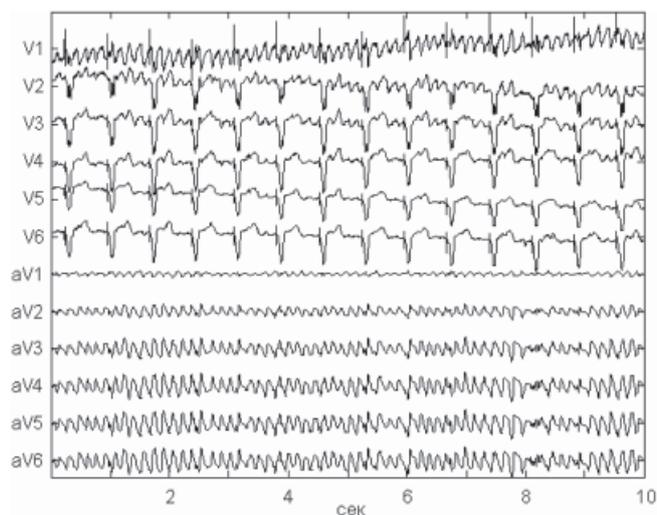


Рис. 4. ЭКГ в 6 грудных отведениях V1–V6 больного K001 из [7] с трепетанием предсердий и восстановленной активностью предсердий aV1–aV6 в грудных отведениях после удаления желудочковой составляющей, шума и артефактов

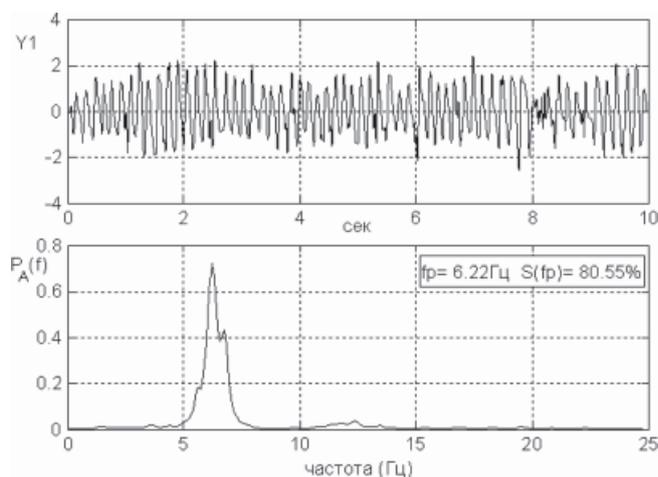


Рис. 5. Спектр мощности сигнала электрической активности предсердий Y1 больного с трепетанием предсердий (доминантная частота $f_p = 6,22$ Гц и спектральная плотность $S(f_p) = 80,55\%$)

тивности предсердий, поэтому спектр $P_A(f)$ источника атриальной активности представляет собой наличие нескольких максимумов в полосе частот 3–8 Гц при низкой спектральной плотности доминантного пика.

Пример такого сигнала ЭКГ приведен на рис. 7, где показан 10-секундный фрагмент из 30 мин ЭКГ с эпизодом фибрилляции предсердий больного I49 и соответствующие выделенные источники Y1–Y6. На 8-й минуте данного образца ЭКГ диагностируется фибрилляция предсердий, которая подтверждается присутствием хаотичных F-волн в сигнале предсердной активности (источник Y1 на рис. 7, а), широким спектром мощности с множественными пиками (1,87 Гц, 3,5 Гц, 4,85 Гц) и малой спектральной плотностью ($S(f_p) = 34,11\%$) основной частоты ($f_p = 3,5$ Гц) (рис. 7, б), а также положительными значениями куртосиса сигнала предсердной активности ($k(Y1) = 0,4$) и характерным видом гистограмм выделенных независимых источников (рис. 8).

Таким образом, при проведенном исследовании у пациента I49 (база данных [6]) были выявлены эпизоды трепетания предсердий, которые развились в фибрилляцию предсердий.

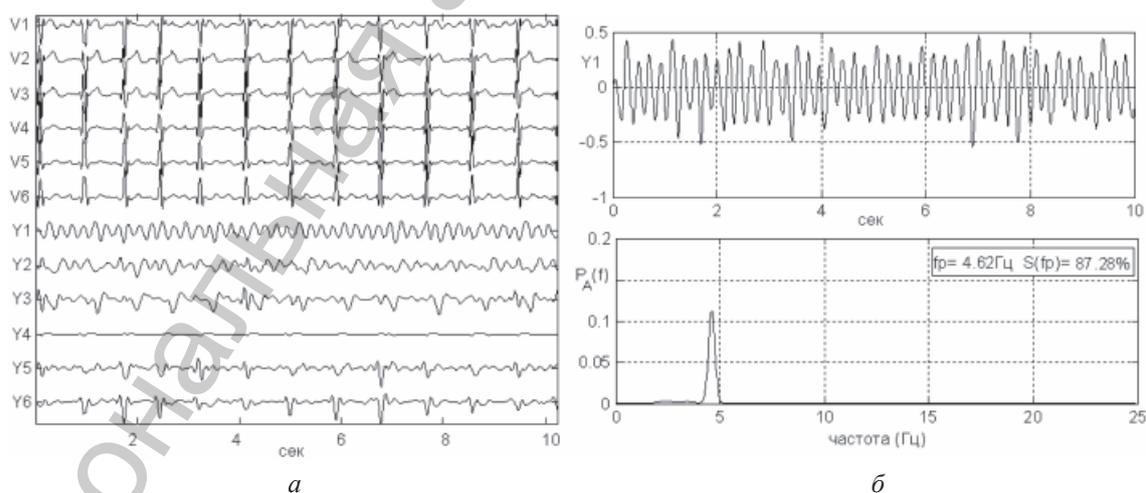


Рис. 6. ЭКГ с эпизодом трепетания предсердий больного I49 из [6] и выделенные источники Y1–Y6 (а); спектр мощности предсердной активности Y1 больного I49 с доминантной частотой $f_p = 4,62$ Гц и спектральной плотностью $S(f_p) = 87,28\%$ (б)

На рис. 5 приведен спектр выделенного источника атриальной активности Y1 больного K001 (сигнал Y1 также показан на рис. 2). Для данного образца получены значения доминантной частоты $f_p = 6,22$ Гц и спектральной плотности $S(f_p) = 80,55\%$.

Аналогичные результаты можно получить при анализе образцов пациентов с ТП из базы данных [6]. На рис. 6 представлены результаты анализа 10 сек фрагмента ЭКГ (7-я минута образца ЭКГ пациента I49), которая демонстрирует признаки трепетания предсердий, поскольку спектр содержит единственную доминантную частоту ($f_p = 4,62$ Гц) с высокой спектральной плотностью ($S(f_p) = 87,28\%$).

С другой стороны, для заболевания ФП характерно существование нескольких эктопических очагов фибрилляционной ак-

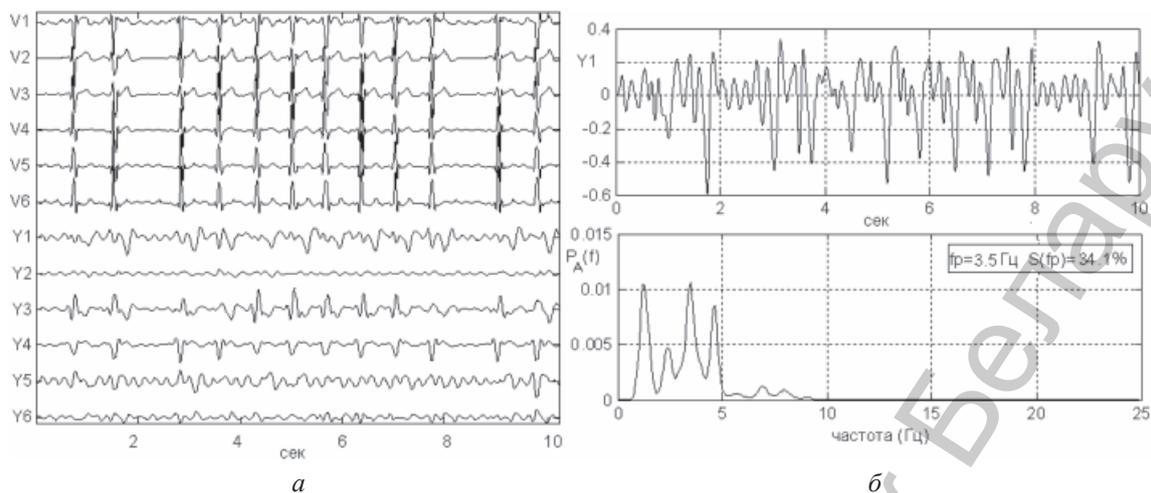


Рис. 7. ЭКГ с эпизодом фибрилляции предсердий больного I49 и выделенные источники Y1–Y6 (масштаб изменен) (а); спектр мощности предсердной активности Y1 больного I49, с основной частотой $f_p = 3,5$ Гц и спектральной плотностью $S(f_p) = 34,11\%$ (б)

Заключение. В настоящей работе предложена дифференциальная диагностика фибрилляции и трепетания предсердий многоэлектродного сигнала ЭКГ на основе совместного использования вейвлет-анализа и метода анализа независимых компонент, который пригоден для выделения сигналов предсердной электрической активности с почти гауссовым распределением. Предварительное вейвлет-преобразование сигнала ЭКГ эффективно удаляет шум и увеличивает параметр негауссовости сигнала, что позволяет использовать эффективные алгоритмы для анализа независимых компонент. Применяется наиболее эффективный для анализа ЭКГ алгоритм независимых компонент под названием RobustICA, который позволил эффективно разделить предсердную и желудочковую составляющую, а также подавить шум и артефакты. После выделения желудочковых и предсердных источников, первые исключаются из сигнала ЭКГ и вычисляется спектр мощности сигнала предсердной активности, доминантная частота и ее спектральная плотность в области частот 3–8 Гц, по величине которой определяется тип аритмии (фибрилляция или трепетание предсердий).

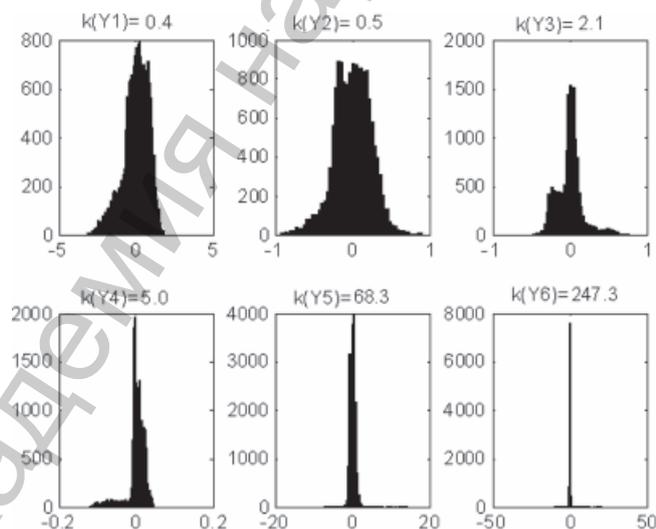


Рис. 8. Гистограмма источников Y1–Y6 со значениями кюртосиса $k(Y1) - k(Y6)$ пациента I49 с фибрилляцией предсердий

Предложенный метод анализа независимых компонент может быть использован в клинической медицине для проведения диагностики больных с предсердными аритмиями и на его основе могут быть даны рекомендации о применении адекватной фармакологической помощи и радиочастотной абляции.

Литература

1. Сыркин А. П., Добровольский А. В. // Consilium Medicum. 2001. Т. 1. № 10.
2. Saudi N., Cosío F., Waldo A., et al. // European Heart Journal. 2001. N 22. P. 1162–1182.
3. Рябькина Г. В., Соболев А. В. Вариабельность ритма сердца. Москва, 2001.
4. Cantini F., Conforti F., Varanini M., Chiarugi F. // Computers in Cardiology. 2004. Vol. 31. P. 665–668.
5. Rieta J. J., Millet-Roig J., Zarzoso V, et. al. // Computers in Cardiology. 2002. Vol. 29. P. 25–28.

6. Massachusetts Institute of Technology, MIT-BIH ECG database, Physionet Bank.
7. РНПЦ «Кардиология», база данных ЭКГ, г. Минск.
8. Добеши И. // Десять лекций по вейвлетам. М., Ижевск, 2001.
9. Дьяконов В., Абраменкова И. // MATLAB. Обработка сигналов и изображений. СПб., 2002.
10. Zarzoso V., Soman P. // IEEE Trans. on Neural Networks. 2010 Vol. 21, N 2. P. 248–261.

M. V. VOITKOVA, A. P. VOITOVICH, A. G. MROCHEK

**DIFFERENTIAL DIAGNOSTICS OF ATRIAL ARRHYTHMIA AND ATRIAL FLUTTER
BY MEANS OF THE INDEPENDENT COMPONENT ANALYSIS**

Summary

We propose a blind source separation method for extraction of the atrial activity from the ECG signal. The method uses a wavelet decomposition of ECG prior to the independent component (ICA) analysis based on the kurtosis sign (fourth-order cumulant) and the spectral analysis in the 3–8 Hz frequency band. We used RobustICA algorithm, in which a kurtosis is a natural measure of the dependence between signals as atrial activity (AA) and ventricular activity. The selection of the AA source from another was estimated by the kurtosis sign according to the spectral morphology of the signals. The typical power spectrum of AA of patient with atrial flutter contains a sharp peak between 3 and 8 Hz and insignificant content in the rest of frequencies. The spectral concentration index can be defined as a measure of the performance of the AA extraction.

УДК [004.522+ 004.934]:004.89

Ю. С. ГЕЦЭВІЧ

ПЕРАЎТВАРЭННЕ ЛІКАЎ У ЛІЧЭБНІКІ Ў СІСТЭМЕ СІНТЭЗА МАЎЛЕННЯ ПА ТЭКСЦЕ НА БЕЛАРУСКАЙ І РУСКАЙ МОВАХ

Аб'яднаны інстытут праблем інфарматыкі НАН Беларусі

(Паступіла ў рэдакцыю 29.01.2010)

Уступ. Сінтэзатар маўлення па арфаграфічным тэксце добра спраўляецца з агучваннем арфаграфічных слоў [1], аднак розныя скарачэнні, абрэвіятуры, лікі, умоўныя абазначэнні і інш. паграбуюць папярэдняй апрацоўкі ў арфаграфічных словах, і толькі пасля гэтага яны могуць быць агучаныя.

У апошні час сістэмы сінтэзу маўлення дасягнулі пэўнай дасканаласці і ўжо шырока выкарыстоўваюцца: камп'ютар спявае па тэкстах і нотах [2], чытае электронныя кнігі [3], субтытры да фільмаў [3], агучвае праграмы для інвалідаў па зроку [4].

Сучасныя замежныя сінтэзатары, напрыклад, англійскага, нямецкага, французскага маўлення, не маюць патрэбы ў складаных пераўтварэннях лікаў у лічэбнікі, бо лічэбнікі не маюць розных канчаткаў для розных граматычных форм. Існуючыя аналагі сінтэзатараў рускага маўлення часта робяцца на ўзор замежных, таму праблема пераўтварэння лікаў у лічэбнікі (асабліва склонавых форм парадкавых лічэбнікаў) застаецца не вырашанай. Так, напрыклад, у [5] апісаны алгарытм і праграмная рэалізацыя пераўтварэння цэлых, дробных і адмоўных лікаў у лічэбнікі са скланеннем лічэбнікаў. Аднак гэтая праграмная бібліятэка напісана толькі для рускай мовы, і ў ёй не рэалізаваны правілы скланення парадкавых лічэбнікаў.

Мэта гэтага артыкула – апісаць пераўтварэнне лікаў паводле іх кантэксту ў парадкавыя і колькасныя лічэбнікі для беларускай і рускай моў. Напрыклад, для колькасных лічэбнікаў стаіць задача паводле набору лічбаў «123» атрымаць іх тэкставае выяўленне: «сто дваццаць тры». Але перад колькасным лічэбнікам можа стаяць прыназоўнік, напрыклад «каля 123», які ўплывае на склонавую форму лічэбніка («каля ста дваццаці трох»). У выпадку парадкавых лічэбнікаў неабходна атрымаць паводле набору лічбаў з дэфісным канчаткам «123-ці», словы «сто дваццаць трыці». Іх правільнае чытанне – аснова для карэктнага чытання больш складаных лікавых выказаў.

Апісанне матэматычнай мадэлі пераўтварэння лікаў у лічэбнікі. Для спрашчэння выкарыстання пераўтваральніка лікаў у лічэбнікі у вылічальнай тэхніцы ўвядзём неабходныя азначэнні для фармальнага апісання мадэлі пераўтваральніка праз матэматычныя функцыі.

Lik – лік, які паступае на апрацоўку.

Tr – трыяда, тры лічбы ліка, якія ідуць адна за адной.

$Lik = \{Tr_n, Tr_{n-1}, \dots, Tr_1\}$, дзе Tr_i – трыяды паслядоўных лічбаў ліка, i – індэкс трыяды.

$Tr_i = a_{3,i} * 10^2 + a_{2,i} * 10^1 + a_{1,i}$, дзе $0 \leq a_{i,j} \leq 9$ – лічбы ліка, $1 \leq j \leq 3$.

Будзем абазначаць адвольны лік праз лічбы з рысай зверху:

$Tr_i = \overline{a_{3,i}a_{2,i}a_{1,i}}$.

Лік выявім праз суму трыядаў $Lik = \sum_{i=1}^n Tr_i * 10^{3(i-1)}$, дзе $n = \left\lfloor \frac{l}{3} \right\rfloor$, $0 \leq l \leq 6$ – колькасць лічбаў ліка.

Empty – гэта ці нуль для лікаў, ці тэкставыя радок нулявой даўжыні.

Вобласць азначэння ўсіх функцый, апісаных ніжэй, адпавядае ліку ці тэкставаму радку, калі па-іншаму гэта не абумоўлена.

Функцыя FNE (first non empty) абірае першы не пусты аргумент (гэта значыць не нуль для лікаў, ці радок ненулявой даўжыні). У якасці аргументаў функцыі могуць быць радкі ці лікі:

$$\text{FNE}(A_1, A_2 \dots A_n) = \begin{cases} A_1, A_1 \neq \text{Empty}; \\ \text{FNE}(A_2 \dots A_n), A_1 = \text{Empty}. \end{cases} \quad (1)$$

Функцыя Concat аб'ядноўвае тэкставыя радкі ў адзін:

$$\text{Concat}(A_1, A_2 \dots A_n) = \bigcup_{i=1}^n A_i. \quad (2)$$

Функцыя CFE (clear first empty) выкарыстоўваецца для «сцірання нулёў» на пачатку тэкставага ліка, вобласць азначэння – тэкставыя радок:

$$\text{CFE}(A_1, A_2 \dots A_n) = \begin{cases} \bigcup A_i, A_1 \neq \text{Empty}; \\ \text{CFE}(A_2 \dots A_n), A_1 = \text{Empty}. \end{cases} \quad (3)$$

Функцыя Arg (argument) перабірае ўваходныя аргументы, пакуль не знаходзіць той аргумент A_i функцыі X , які першы даў неабходнае значэнне Y , ці калі ніякае канкрэтнае значэнне Y не чакаецца, тады выводзіцца першы аргумент A_i функцыі X такі, які даў неабходны вынік функцыі X :

$$J = \text{Arg}(Y = X(A_1, A_2 \dots A_n)); \quad (4)$$

ці

$$J = \text{Arg}(X(A_1, A_2 \dots A_n)).$$

Увядзём сімвал для раздзялення лічэбнікаў: $Sp = \langle \rangle$ (прабел).

Мадэль. Знойдзем першую ненулявую трыяду ліка:

$$J_{\text{NET}} = \text{Arg}(\text{FNE}(Tr_1, Tr_2 \dots Tr_n)).$$

Функцыя F пераўтварае Lik у $Licebnik$:

$$\text{Licebnik} = F(Lik, P, K) = \bigcup_{i=1}^n (S_1(Tr_i, i, P, K) \cup DS(i, J_{\text{NET}}, K) \cup S_2(Tr_i, i, J_{\text{NET}}, P, K) \cup Co), \quad (5)$$

дзе P – прыназоўнік перад лікам у тэксце, K – дэфісны канчатак пасля ліка ў тэксце. Вынікам функцыі F будуць словы-лічэбнікі (утварае функцыя S_1) і назвы разраднасці трыядаў (утварае функцыя S_2), магчыма, раздзеленыя прабеламі (утварае функцыя DS).

Функцыя S_i прымае на ўваход раней не апісаных ў артыкуле аргументы Tr_i – i -ю трыяду ліка, i – нумар трыяды ліка. Функцыя FNE прымае на свае тры ўваходы вынікі трох крокаў алгарытма:

$$\begin{aligned} S_1(Tr_i, i, P, K) = & \text{FNE}(Sl(Tr_i, P, K, i), \text{CFE}(Sl(\overline{a_{3,i}}, 0, 0, P, K, \text{Empty}), Sl(\overline{a_{2,i}}, a_{1,i}, P, K, i)), \\ & \text{CFE}(Sl(\overline{a_{3,i}}, 0, 0, P, K, \text{Empty}), Sl(\overline{a_{2,i}}, 0, P, K, \text{Empty}), Sl(\overline{a_{1,i}}, P, K, i))). \end{aligned} \quad (6)$$

1. Калі трыяда ліка, якую шукаем, адразу ж знойдзена праз функцыю Sl , то адказ ёсць, калі не – то пераход на 2-гі крок.

2. Разбіваем трыяду на сотні і дзесяткі. Дадаём нулі да ліку сотняў $(\overline{a_{3,i}}, 0, 0)$. Атрымліваем два лікі. Калі для кожнага з іх знойдзены значэнні праз функцыю Sl , то адказы ёсць, калі не – то пераход на 3-ці крок.

3. Разбіваем трыяду на сотні, дзесяткі, адзінкі. Дадаём нулі да ліку сотняў $(\overline{a_{3,i}}, 0, 0)$. Дадаём нуль да ліку дзесяткаў $(\overline{a_{2,i}}, 0)$. Атрымліваем тры лікі. Для кожнага з іх будзе знойдзена значэнне праз функцыю Sl . Яно і будзе адказам.

У артыкуле маецца на ўвазе, што нязменныя дадзеныя арганізуюцца ў спісы (T_{ps} , T_{lk} , T_{ls} , T_{il} , T_{is}), а сукупнасць спісаў укладаюцца ў слоўнік (гл. ніжэй). Функцыя Sl звяртаецца амаль наўпрост да спісаў слоўніка, таму будзем называць яе функцыяй слоўніка:

$$Sl(Lik, P, K, i) = \begin{cases} T_{ls}(Lik, "N"), i > 1; \\ T_{lk}(Lik, K), K \neq \text{Empty}; \\ T_{ls}(Lik, T_{ps}(P)), K = \text{Empty}. \end{cases} \quad (7)$$

Пры гэтым для трыядаў з $i > 1$ лікі абіраюцца ў назоўным склоне, а для $i = 1$ робіцца спроба праскланяць іх паводле дэфіснага канчатка ці паводле прыназоўніка.

Функцыя S_2 працуе падобна да функцыі S_1 , толькі ў дачыненні да назваў трыядаў, якія маюць $i \geq 2$, бо звычайна не гавораць «сто дваццаць тры адзінкі»:

$$S_2(Tr_i, i, J_{\text{NET}}, P, K) = \begin{cases} \text{Empty}, i = 1; \\ \text{FNE}(T_{il}(a_{3,i}, a_{2,i}, a_{1,i}), T_{il}(a_{2,i}, a_{1,i}), T_{il}(a_{1,i})), i \neq J_{\text{NET}} \text{ ці } P, K = \text{Empty}; \\ \text{Concat}(\text{"тысяч"}, K), i = J_{\text{NET}}, K \neq \text{Empty}; \\ T_{is}(T_{ps}(P)), i = J_{\text{NET}}, P \neq \text{Empty}. \end{cases} \quad (8)$$

У нашым выпадку будуць дадавацца толькі назвы тысячных разрадаў для колькасных лічэбнікаў (1-шы, 2-гі, 4-ты выпадкі ў формуле 8) ці іх склонавыя формы пры наяўнасці K ці P для парадкавых лічэбнікаў (3-ці выпадак у формуле).

Паколькі парадкавыя лічэбнікі, якія заканчваюцца на *-тысячны* [6, с. 117–133, 7, 8, с. 573–581], пішуцца разам ва ўсіх склонах, была ўведзена функцыя Ds (delimiter space):

$$Ds(i, J_{\text{NET}}, K) = \begin{cases} \text{Empty}, i = J_{\text{NET}}, i > 1, K \neq \text{Empty}; \\ Sp, \text{ у іншых выпадках}. \end{cases} \quad (9)$$

Гэтая функцыя не аддзяляе назваў лікаў ад назваў трыядаў, калі гэта парадкавы лічэбнік для тысячных разрадаў. Патрэбна зазначыць, што ў тэарэтычнай мадэлі бярэцца функцыя, якая раздзяляе назвы лікаў у трыядах для колькасных лічэбнікаў.

Паводле апісанай вышэй мадэлі прывядзём некаторыя прыклады апрацоўкі лікаў у колькасных і парадкавых лічэбнікі (табл. 1).

Табліца 1. Прыклады апрацоўкі колькасных лікаў у лічэбнікі

Па-беларуску		Па-руску	
Тэкст да пераўтварэння	Тэкст пасля пераўтварэння	Тэкст да пераўтварэння	Тэкст пасля пераўтварэння
Інстытут правёў 450 эксперыментаў з 534 неабходных.	Інстытут правёў чатырыста пяцьдзесят эксперыментаў з пяцісот трыццаці чатырох неабходных.	Бумажной фабрике в Добруше исполняется 140 лет.	Бумажной фабрике в Добруше исполняется сто сорок лет.
Настаўнік атрымаў заробак 784 921 рубель.	Настаўнік атрымаў заробак семсот восемдзесят чатыры тысячы дзевяцьсот дваццаць адзін рубель.	В 20 случаях из 50 месторождения нефти используются не до конца.	В двадцати случаях из пятидесяти месторождения нефти используются не до конца.
Завод выпускаў 234 000-ы аўтамабіль.	Завод выпускаў двухсоттрыццацічатырохтысяч аўтамабіль.	На спартакиаде победа присуждена 212-му атлету сборной Казахстана.	На спартакиаде победа присуждена двести двенадцатому атлету сборной Казахстана.
У нас няма 123-га байца.	У нас няма сто дваццаць трыццага байца.	Эта страна широко отмечала 90-ю годовщину независимости.	Эта страна широко отмечала девяностую годовщину независимости.

Мадэль слоўніка. Неабходна зазначыць, што для апісанага пераўтварэння галоўная роля адводзіцца запавенню спісаў слоўніка. Спісы T_{ps} , T_{lk} , T_{ls} , T_{tl} , T_{ts} слоўніка прыводзяцца для беларускай і рускай моў у табл. 2–6. Праз сімвал N абазначаецца назоўны, R – родны, D – давальны, V – вінавальны, T – творны, P – месны склony. Спісы слоўніка складаліся праз паступовае напавенне і выдаленне дублікатных дадзеных. Агульная колькасць запісаў па ўсіх спісах не больш за 1000 радкоў з максімум трыма слупкамі.

Табліца 2. Спіс T_{ps} «прыназоўнік \Rightarrow склон» (фрагмент)

Па-беларуску		Па-руску	
Прыназоўнік	Склон	Прыназоўнік	Склон
Empty	N	Empty	N
дзеля	R	ради	R
ад	R	от	R
пры	R	у	R
без	R	без	R
вакол	R	вокруг	R
для	R	для	R
да	R	до	R
з	R	из	R
з-за	R	из-за	R
з-пад	R	из-под	R
пра	V	про	V
праз	V	через	V
над	T	надо	T
перад	P	перед	P
каля	P	около	P
...

Табліца 3. Спіс T_{lk} : «лік, канчатак \Rightarrow лічэбнік» (фрагмент)

Па-беларуску			Па-руску		
Лік	Канчатак	Лічэбнік	Лік	Канчатак	Лічэбнік
...
12	га	дванаццатага	12	го	двенадцатого
12	е	дванаццатае	12	е	двенадцатое
12	ы	дванаццаты	12	й	двенадцатый
12	м	дванаццатым	12	м	двенадцатым
12	мі	дванаццатымі	12	ми	двенадцатыми
12	му	дванаццатаму	12	му	двенадцатому
12	ае	дванаццатае	12	ое	двенадцатое
12	ай	дванаццатай	12	ой	двенадцатой
12	аю	дванаццатаю	12	ою	двенадцатою
12	ую	дванаццатую	12	ую	двенадцатую
12	х	дванаццатых	12	х	двенадцатых
12	ыя	дванаццатыя	12	ые	двенадцатые
12	ым	дванаццатым	12	ым	двенадцатым
...

Табліца 4. Спіс T_{ls} – «лік, склон \Rightarrow лічэбнік» (фрагмент)

Па-беларуску			Па-руску		
Лік	Склон	Лічэбнік	Лік	Склон	Лічэбнік
...
3	T	трыма	3	T	тремя
30	T	трыццацю	30	T	тридцатью
300	T	трымастамі	300	T	тремястами
4	T	чатырма	4	T	четырьмя
40	T	сарака	40	T	сорока

Па-беларуску			Па-руску		
Лік	Склон	Лічэбнік	Лік	Склон	Лічэбнік
400	T	чатырмастамі	400	T	четырьмястами
5	T	пяццю	5	T	пятью
50	T	пяццюдзесяццю	50	T	пятьюдесятью
500	T	пяццюстамі	500	T	пятьюстами
6	T	шасцю	6	T	шестью
60	T	шасцюдзесяццю	60	T	шестьюдесятью
600	T	шасцюстамі	600	T	шестьюстами
8	T	васьмю	8	T	восемью
80	T	васьмюдзесяццю	80	T	восемьюдесятью
800	T	васьмюстамі	800	T	восемьюстами
9	T	дзевяццю	9	T	девятью
90	T	дзевяноста	90	T	девьяноста
...

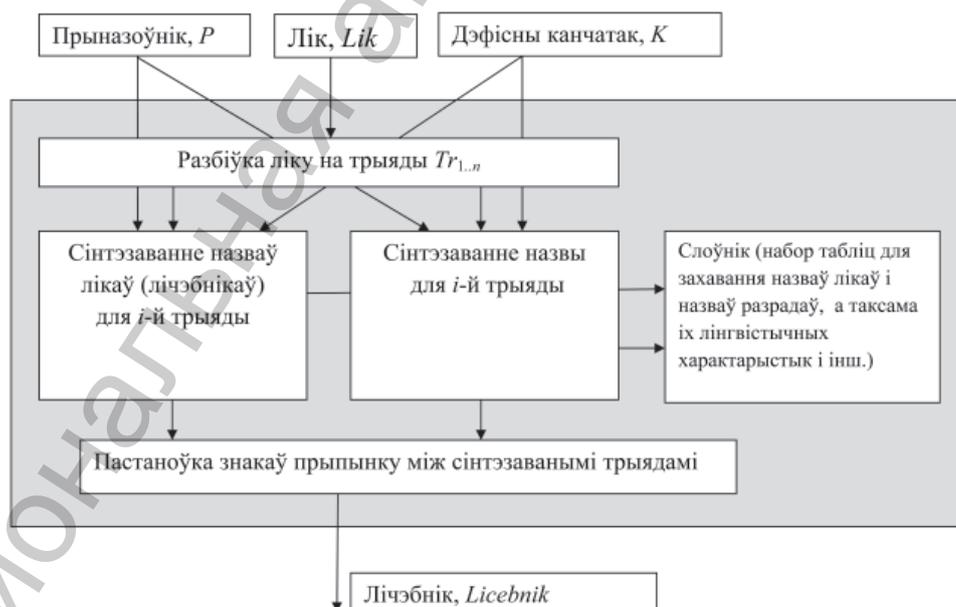
Табліца 5. Спіс T_{li} : «лік \Rightarrow склон назова трыяды»

Па-беларуску		Па-руску	
Лік	Назва трыяды	Лік	Назва трыяды
1	тысяча	1	тысяча
2...4	тысячы	2...4	тысячи
5..20, 30, 40, ... 90	тысяч	5..20, 30, 40, ... 90	тысяч
100, 200, ... 900	тысяч	100, 200, ... 900	тысяч

Табліца 6. Спіс T_{ts} : «склон \Rightarrow склонавая форма назвы трыяды»

Па-беларуску		Па-руску	
Склон	Назва трыяды	Склон	Назва трыяды
N	тысячны	N	тысячный
R	тысячнага	R	тысячного
D	тысячнаму	D	тысячному
V	тысячнага	V	тысячного
T	тысячным	T	тысячным
P	тысячным	P	тысячном

Агульная схема дзейнасці пераўтваральніка «лік-лічэбнік». Разгледзім лікі ад 0 да 999 999. Пераўтваральнік «лік-лічэбнік» (малюнак) атрымлівае на ўваход прыназоўнік (перад лікам), лік,



Агульная схема пераўтваральніка «лік-лічэбнік»

дэфісны канчаток ліку. Лік разбіваецца на трыяды. Для кожнай трыяды паасобку вызначаюцца назвы лікаў (лічэбнікі) і назвы трыядаў з дапамогай канкрэтных лакальных алгарытмаў і слоўніка. Апрацаваныя трыяды выводзяцца ў адваротным парадку з прастаўленымі знакамі прыпынку (звычайна гэта коска) паміж імі.

Высновы. Такім чынам, у дадзеным артыкуле была пастаўлена і вырашана задача атрымання колькасных і парадкавых лічэбнікаў на прыкладзе лікаў ад 0 да 999999. Дзякуючы апісанай тэарытычнай мадэлі, можна ўбачыць, што гэтая задача даволі складаная нават для ліку, абмежаванага толькі шасцю знакамі. Але даволі празрыстым з'яўляецца рашэнне задачы сінтэзавання лічэбнікаў і для мільёнаў, і для мільярдаў праз дадаванне адпаведных табліц з назвамі лікаў і назвамі разрадаў лікаў.

Алгарытмы ў апісанай мадэлі могуць быць выкарыстаны для сінтэзавання лічэбнікаў беларускай і рускай, а пры некаторых дапрацоўках і для іншых славянскіх моў. Далейшае развіццё алгарытма звязваецца з улікам не толькі прыназоўнікаў і дэфісных канчаткаў ліку, але і з аналізам роду, ліку і склону слоў, якія ідуць як перад лікам, так і пасля яго.

Апісаны алгарытм рэалізаваны ў выглядзе праграмага модуля і выкарыстоўваецца ў складзе двухмоўнай сістэмы сінтэза маўлення новага пакалення «ФОНЕМОФОН – NG», які распрацоўваецца ў лабараторыі распазнавання і сінтэза маўлення АПП НАН Беларусі.

Аўтар удзячны навуковаму кіраўніку доктару тэх. навук Б. М. Лабанаву, а таксама магістру філалагіч. навук С. А. Дзенісюк.

Літаратура

1. Лобанов Б. М., Циркульник Л. И. Компьютерный синтез и клонирование речи. Минск, 2008.
2. Brailcom, o. p. s. «Singing Computer». Free(b)soft. [Electronic resource]. Mode of access: <http://www.freebsoft.org/singing-computer>. Date of access: 16.07.2010.
3. Речевые технологии. Программы: синтез речи [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://speech-soft.ru/index.php?a=inf&inf=view&id_razdel=1181017375. Дата доступа: 01.01.2010.
4. JAWS for Windows Screen Reading Software [Electronic resource]. Mode of access: <http://www.freedomscientific.com/products/fs/jaws-product-page.asp>. Date of access: 16.07.2010.
5. Библиотека для формирования «прописи» числа в заданном падеже [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://altsoph.livejournal.com/112849.html>. Дата доступа: 21.07.2010.
6. Беларуская граматыка. У 2 ч. Ч. 1 Фаналогія. Арфаграфія. Марфалогія. Словаўтварэнне. Націск / АН БССР, Інстытут мовазнаўства імя Я. Коласа. Мінск, 1985. С. 117–133.
7. Кароткая граматыка беларускай мовы. У 2 ч. Ч. 1. Фаналогія. Марфалогія. Марфалогія. Мінск, 2007.
8. Русская грамматика. В 2 т. Т. 1 Фонетика. Словообразование. Морфология. / Академия наук СССР, Институт русского языка. М., 1982. С. 573–581.

Yu. S. HETSEVICH

NUMBERS TO NUMERALS CONVERTING IN THE TEXT TO THE SPEECH SYNTHESIS IN BELARUSIAN AND RUSSIAN LANGUAGES

Summary

The article describes the numbers to ordinal and cardinal numerals transformation for numbers in range of 0 – 999 999 for TTS-synthesis systems in Belarusian and Russian languages. The software implementation of the described mathematical model of the transformation and the structure of the dictionary are used in the TTS-synthesis system «PHONEMOPHON – NG». The developed algorithms can be used in TTS-synthesis systems for a wide range of the Slavic languages subject to adding dictionaries for appropriate languages.

РЭФЕРАТЫ

УДК 519.2

Харин Ю. С. Вечерко Е. В. **О некоторых задачах статистической проверки гипотез в стеганографии** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 5–13.

Исследуются математические модели встраивания скрытого сообщения. Построены статистические тесты обнаружения факта встраивания скрытого сообщения и оценки мощности этих тестов. Теоретические выводы иллюстрируются численными результатами.

Ил. 4. Библиогр. – 8 назв.

УДК 519.2

Жук Е. Е. **Устойчивость байесовского решающего правила при неточно заданных априорных вероятностях классов** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 14–20.

Методом асимптотического разложения риска исследуется устойчивость байесовского решающего правила (БРП) к неточностям в задании априорных вероятностей классов. При малых отклонениях априорных вероятностей от истинных значений получено асимптотическое соотношение, позволяющее аналитически вычислить приращение риска относительно оптимального значения, достижимого БРП при точно заданных априорных вероятностях.

Библиогр. – 4 назв.

УДК 519.2:005

Овсянников А. В. **Интервальное прогнозирование нестационарных процессов на основе ядерных оценок плотности вероятности** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 21–28.

В статье рассматривается интервальное прогнозирование нестационарных случайных процессов на основе ядерных оценок плотности вероятности. Показано, что такой подход обеспечивает построение теоретически обоснованного, устойчивого к динамике «шума» прогноза. Приведены последовательные алгоритмы идентификации плотности и ее параметров. Исследовано прогнозирование обобщенно-диффузионного процесса. Указана возможность построения робастного интервального прогноза.

Ил. 2. Табл. 3. Библиогр. – 5 назв.

УДК 519.65

Худяков А. П. **Интерполяционные многочлены типа Эрмита–Биркгофа относительно отдельных чебышевских систем функций** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 29–36.

Построены многочлены относительно тригонометрических, рациональных специального вида и экспоненциальных функций, удовлетворяющие обобщенным интерполяционным условиям Эрмита–Биркгофа.

Библиогр. – 6 назв.

УДК 512.542

Воробьев Н. Н., Побойнев В. О. **О булевых решетках частично насыщенных формаций** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 37–42.

Описываются τ -замкнутые n -кратно ω -насыщенные формации с булевой решеткой τ -замкнутых n -кратно ω -насыщенных подформаций.

Библиогр. – 18 назв.

УДК 512.542

К а м о р н и к о в С. Ф. **О решетке подгрупп фраттиниера типа** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 43–48.

Подгруппа H конечной группы G называется подгруппой фраттиниера типа, если для некоторого регулярного подгруппового m -функтора θ подгруппа H совпадает с пересечением всех максимальных θ -подгрупп группы G . В работе изучаются свойства решетки $\text{Fit}(G)$ всех подгрупп фраттиниера типа конечной группы G .

Библиогр. – 8 назв.

УДК 511.36

К у к с о О. С., В а с и л ь е в Д. В., К о л е д а Д. В. **Применение метрической теории трансцендентных чисел к задаче о значениях дискриминантов целочисленных многочленов** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 49–53.

В работе получены оценки снизу для числа целочисленных многочленов заданной степени и высоты, дискриминанты которых не превосходят некоторой границы, являющейся степенью высоты.

Библиогр. – 3 назв.

УДК 511.36

П и р ь т к о Е. В. **Многомерная лемма Гензеля и совместные приближения p -адических чисел алгебраическими** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 54–57.

В работе изучаются совместные приближения двух p -адических чисел (w_1, w_2) алгебраическими, а именно, приближения корнями одного и того же многочлена $P(x)$. Показывается, что если выполнены некоторые оценки на значение многочлена P и его производной P' в заданных точках, то хотя бы один из корней многочлена $P(x)$, ближайший к w_1 или w_2 по сравнению с другими корнями, принадлежит \mathbf{Z}_p , а не его алгебраическому расширению.

Библиогр. – 4 назв.

УДК 517.926.4 + 517.928.2

К а с а б у ц к и й А. Ф. **О множествах Лебега показателя экспоненциальной устойчивости линейных дифференциальных систем с параметром** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 58–67.

Для числа $\lambda < 0$ множеством λ -экспоненциальной устойчивости семейства линейных дифференциальных систем с вещественным параметром называется множество всех тех значений параметра, при которых отвечающие им системы семейства имеют старший показатель Ляпунова, меньший λ . Получены необходимые условия, которым должны удовлетворять множества λ -экспоненциальной устойчивости. Для некоторых из этих условий установлена их неупрощаемость.

Библиогр. – 8 назв.

УДК 517.977

Х а р т о в с к и й В. Е. **К вопросу управления линейными системами нейтрального типа** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 68–75.

Для линейной автономной дифференциально-разностной системы нейтрального типа рассматривается задача выбора управления, обеспечивающего нулевое решение в течение любого заданного времени. Представленные результаты ориентированы, прежде всего, на упомянутые системы (или начальные функции), не обладающие свойством полной управляемости.

Библиогр. – 8 назв.

УДК 517.958: 534.286–16

Е р о ф е е н к о В. Т. **Моделирование двухсторонних граничных условий для акустических волн на упругом экране** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 76–84.

Получены двухсторонние нелокальные граничные условия в аналитическом виде, связывающие монохроматические звуковые плоские поля по обе стороны упругого слоя, перемещения среды в котором подчиняются уравнениям Ламе с произвольными комплексными коэффициентами Ламе и плотностью материала

слоя. Граничные условия могут быть использованы в локально плоском приближении для моделирования процессов проникновения звуковых волн через тонкостенные упругие оболочки произвольной формы.

Библиогр. – 11 назв.

УДК 539.12:530.145

Плетюхов В. А., Стражев В. И., Андрусевич П. П. **Внутренняя симметрия восьмикомпонентного дираковского поля** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 85–90.

Исследована внутренняя симметрия 8-компонентного дираковского поля в матричном подходе. Установлено, что классическая формулировка теории обладает внутренней симметрией $SO(3,2)$. На квантовом уровне остается симметрия $SO(3)$ ($SU(2)$), обычно сопоставляемая такому полю.

Библиогр. – 1 назв.

УДК 539.12

Овсюк Е. М., Кисель В. В., Редьков В. М. **О дираковской частице в однородном магнитном поле в пространстве Римана** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 91–97.

Построены точные решения уравнения Дирака в пространстве постоянной положительной кривизны, сферическом пространстве Римана на фоне внешнего магнитного поля, являющегося аналогом однородного магнитного поля в пространстве Минковского. Найдена обобщенная формула для разрешенных уровней энергий, описывающая квантование движения частицы в магнитном поле на фоне геометрии пространства Римана.

Библиогр. – 9 назв.

УДК 534.535

Кулак Г. В., Анисимова А. Е., Матвеева А. Г., Ропот П. И. **Возбуждение гиперзвука системой встречно-штыревых электродов в кристаллах ниобата лития для широкополосной обработки сигналов** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 98–102.

Исследовано нерезонансное возбуждение продольных и сдвиговых ультразвуковых волн в тригональных кристаллах системой встречно-штыревых преобразователей. Показано, что сдвиговые ультразвуковые волны, возбуждаемые в кристаллах ниобата лития YZ-среза в широком частотном диапазоне, могут использоваться для создания широкополосных акустооптических дефлекторов, спектроанализаторов и ультразвуковых линий задержки СВЧ-диапазона; для расширения частотного диапазона устройств могут применяться также и продольные ультразвуковые волны.

Ил. 2. Библиогр. – 11 назв.

УДК 548.4:537.312

Каролик А. С. **Электрические и термоэлектрические свойства субгранц в компактных субмикроструктурах** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 103–107.

Предложена модель высокоугловой субгранцы в компактных субмикроструктурных материалах, полученных интенсивной пластической деформацией. Субгранца представлялась двойной дислокационной стенкой. На основе этой модели, с использованием ранее разработанной модели дислокации, методом парциальных волн рассчитан вклад удельной площади субгранц в электросопротивление и термоЭДС меди и никеля. Результаты расчета сравниваются с результатами ранее выполненных измерений изменения электросопротивления и термоЭДС на единицу удельной площади гранц в процессе изохронного отжига субмикроструктурных образцов меди и никеля после интенсивной пластической деформации. Получено хорошее согласие для термоЭДС и удовлетворительное – для электросопротивления.

Ил. 1. Табл. 1. Библиогр. – 21 назв.

УДК 538.945

Кушнир В. Н., Прищепа С. Л. **Магнитные неоднородности и резистивный переход в наноструктурах сверхпроводник / ферромагнетик / сверхпроводник** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 108–111.

Исследуется влияние неоднородности ферромагнитного слоя на сверхпроводящий переход в трехслойных наноструктурах типа сверхпроводник / ферромагнетик / сверхпроводник на примере $Nb/Cu_{0,41}Ni_{0,59}/Nb$. С этой целью анализируется зависимость критической температуры T_c и ширины сверхпроводящего перехо-

да от толщины ферромагнитного слоя d_F . Показано, что зависимость $T_c(d_F)$ чувствительна к вариации концентрации N_i вдоль слоя вблизи толщины d_F , соответствующей сверхпроводящему π -состоянию и вблизи точки кроссовера из 0- в π -состояние.

Ил. 3. Библиогр. – 15 назв.

УДК 612.172.4

Войткова М. В., Войтович А. П., Мрочек А. Г. **Дифференциальная диагностика мерцательной аритмии и трепетания предсердий на основе анализа независимых компонент** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 112–118.

Предложен новый метод дифференциальной диагностики фибрилляции предсердий (ФП), флаттера предсердий (ФлП) на основе вейвлет-анализа и анализа независимых компонент, пригодный для выделения сигналов предсердной электрической активности с почти гауссовым распределением. Статистика высоких порядков используется для разделения предсердной и желудочковой составляющей, и далее вычисляется спектр мощности сигнала предсердной активности, доминантная частота и спектральная плотность в области частот 3–8 Гц. Индекс спектральной концентрации доминантной частоты используется как критерий качества выделения атриальной составляющей.

Ил. 8. Библиогр. – 10 назв.

УДК [004.522+004.934]:004.89

Гецевич Ю. С. **Преобразование чисел в числительные в системе синтеза речи по тексту на белорусском и русском языках** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 119–124.

В статье описывается преобразование чисел от 0 до 999999 в соответствии с их контекстом в порядковые и количественные числительные для системы синтеза речи по тексту на белорусском и русском языках. Приводится математическая модель преобразования и структура словаря, реализованные в виде программного модуля в системе синтеза речи «ФОНЕМОФОН – NG». Алгоритмы преобразования универсальны и могут быть использованы для синтезирования чисел в числительные для широкого круга славянских языков при добавлении словарей на соответствующих языках.

Ил. 1. Табл. 6. Библиогр. – 8 назв.